This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

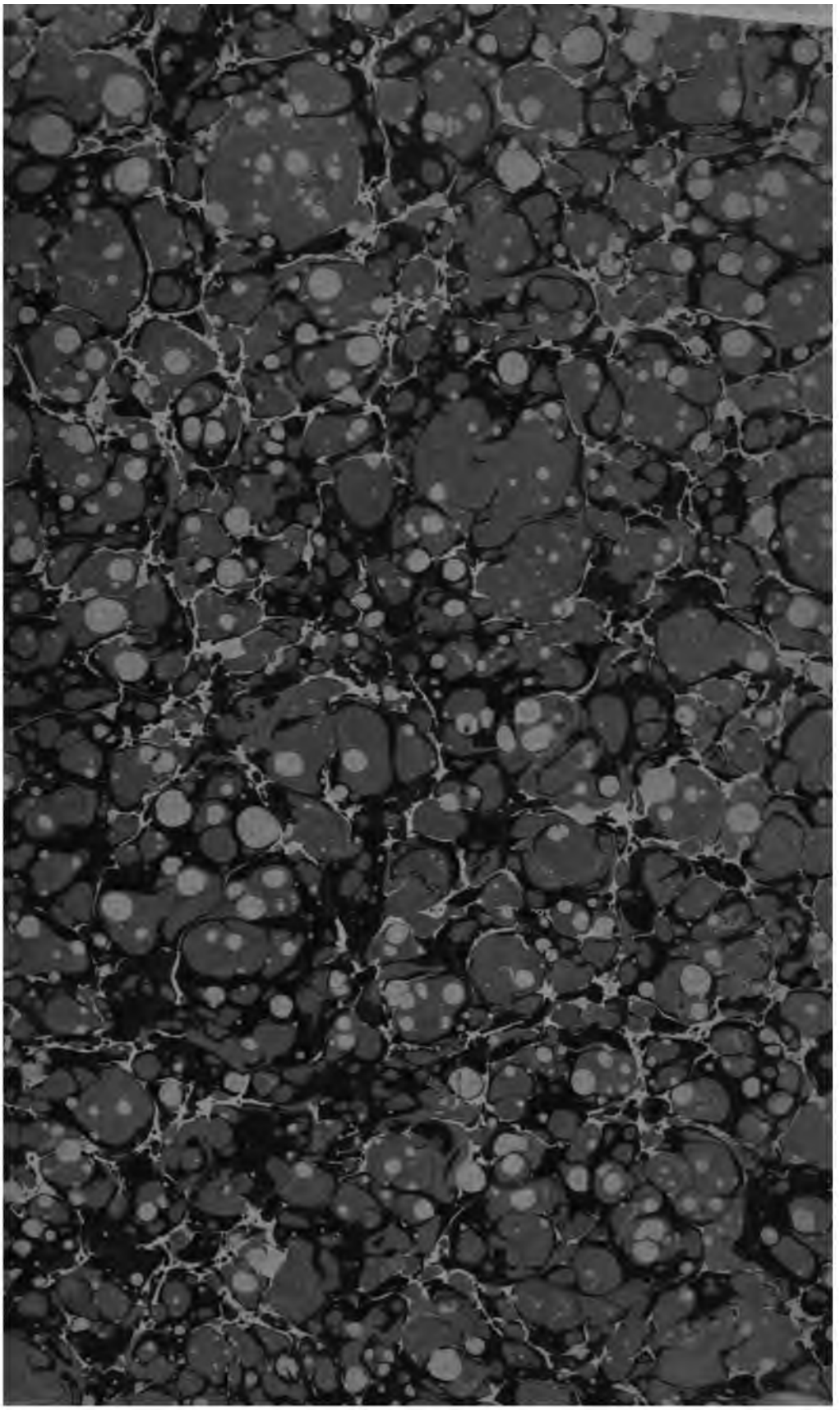
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`



36349 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-TROISIÈME. — ANNÉE 1905

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ

A LA SORBONNE.

1905

36349 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE,

PUBLIÉ

PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-TROISIÈME. — ANNÉE 1905

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ

A LA SORBONNE.

1905

119391

ÉTAT

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

AU COMMENCEMENT DE L'ANNÉE 1905 (¹).

Membres honoraires du Bureau....	MM. APPELL. DARBOUX. GUYOU. HATON DE LA COUPILLIÈRE. HUMBERT. JORDAN. MANNHEIM. MITTAG-LEFFLER. PICARD. POINCARÉ. VOLTERRA. ZEUTHEN.
Président.....	MM. BOREL.
Vice-Présidents	BIOCHE. BLUTEL. BRICARD. HADAMARD.
Secrétaires	GRÉVY. RAFFY.
Vice-Secrétaires.....	ESTANAVE. LEAU.
Archiviste.....	SERVANT.
Trésorier.....	CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil(²).	ANDOYER, 1907. ANDRÉ, 1907. BOURLET, 1908. CARVALLO, 1908. FONTENÉ, 1908. FOURET, 1907. KOENIGS, 1906. LECORNU, 1906. MAILLET, 1908. PAINLEVÉ, 1907. PERRIN (R.), 1906. TOUCHE, 1906.

(¹) MM. les Membres de la Société sont instamment priés d'adresser au Secretaria les rectifications qu'il y aurait lieu de faire à cette liste.

(²) La date qui suit le nom d'un membre du Conseil indique l'année au commencement de laquelle expire le mandat de ce membre.

Date de l'admission.

1872. **ACHARD**, ancien directeur de la Compagnie d'assurances sur la vie *la Foncière*, rue de la Terrasse, 6 *bis*, à Paris (17e).

1900. **ACKERMANN-TEUBNER**, éditeur, à Leipzig.

1893. **ADAM** (Paul), ingénieur des ponts et chaussées, docteur ès sciences mathématiques, boulevard des Invalides, 40, à Paris (7e).

1900. **ADHÉMAR** (vicomte Robert d'), professeur suppléant à la Faculté libre des Sciences, place de Genevières, 14, à Lille (Nord).

1896. **ANDOYER**, professeur à la Faculté des Sciences, rue du Val-de-Grâce, 1, à Paris (5e).

1894. **ANDRADE**, professeur à la Faculté des Sciences, 1, rue de la Mouillière, à Besançon.

1872. **ANDRÉ** (Désiré), docteur ès sciences, rue Bonaparte, 70 *bis*, à Paris (6e).

1901. **ANGIBOUST**, rue d'Assas, 104, à Paris (6e).

1879. **APPELL**, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences et professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bonaparte, 17, à Paris (6e).

1900. **AURIC**, ingénieur des ponts et chaussées, à Valence (Drôme).

1882. **AUTONNE**, ingénieur des ponts et chaussées, rue Mont-Bernard, 9, à Lyon (Rhône).

1900. **BAIRE**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier (Hérault).

1896. **BAKER**, professeur à l'Université, à Toronto (Canada).

1894. **BALITRAND**, ingénieur, à Métlaoui (Tunisie).

1889. **BEGHIN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Champ-de-Mars, 22, à Paris (7e).

1875. **BERDELLÉ**, ancien garde général des forêts, à Rioz (Haute-Saône).

1904. **BERNSTEIN**, docteur ès sciences, rue de la Tombe-Issoire, 144, à Paris (14e).

1872. **BIENAYMÉ** (Arthur), inspecteur général du génie-maritime en réserve, rue Revel, 14, à Toulon (Var).

1888. **BIOCHE**, professeur au lycée Louis-le-Grand, rue Notre-Dame-des-Champs, 56, à Paris (6e).

1875. **BISCHOFFSHEIM**, membre de l'Institut, rue Taitbout, 3, à Paris (9e).

1898. **BLAKE** (Edwin-M.), Université d'Arizona, à Tucson (Arizona, États-Unis).

1900. **BLUMENTHAL** (Otto), docteur en philosophie, Schwanallée, 7, à Marbourg (Allemagne).

1891. **BLUTEL**, professeur au lycée Saint-Louis, chargé de conférences à la Faculté des Sciences, rue Denfert-Rochereau, 110, à Paris (14e).

1902. **BOBERIL** (vicomte Roger du), rue d'Orléans, 30, à Rennes (Ille-et-Vilaine).

1892. **BONAPARTE** (prince Roland), avenue d'Iéna, 10, à Paris (16e).

1895. **BOREL**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, boulevard Arago, 2, à Paris (13e).

1896. **BOULANGER**, maître de conférences à l'Université, rue Caumartin, 78, à Lille (Nord).

1896. **BOURGET** (Henry), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Saint-Jacques, 20, à Toulouse (Haute-Garonne).

1896. **BOURLET**, professeur à l'École des Beaux-Arts et au lycée Saint-Louis, avenue de l'Observatoire, 22, à Paris (14e).

1903. **BOUTIN**, rue La Vieuville, 26, à Paris.

1904. **BOUTROUX** (P.), docteur ès sciences, rond-point Bugeaud, 5, à Paris (16e).

1900. **BREITLING**, proviseur du lycée Saint-Louis, boulevard Saint-Michel, 44, à Paris (6e).

1897. **BRICARD**, ingénieur des manufactures de l'État, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 295, à Paris (14e).

1873. **BROCARD**, chef de bataillon du génie en retraite, Ville-Haute, 75, à Bar-le-Duc.

1901. **BUHL** (Adolphe), maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue de Villefranche, 4, à Montpellier (Hérault).

Date de l'admission.

1893. **BURKHARDT**, professeur à l'Université, Kreuzplatz, 1, à Zürich (Suisse).

1897. **CABREIRA**, membre de l'Académie royale des Sciences, rua da Alegria, 32, à Lisbonne.

1894. **CAHEN**, professeur au collège Rollin, 32, rue de la Pompe, à Paris (16e).

1893. **CALDARERA**, professeur à l'Université, palazzo Giampaolo, via della Liberta, à Palerme.

1888. **CANET** (Gustave), ingénieur civil, directeur de l'artillerie de MM. Schneider et Cie, avenue Henri-Martin, 87, à Paris (16e).

1885. **CARON**, professeur de géométrie descriptive, rue Claude-Bernard, 71, à Paris (5e).

1892. **CARONNET**, docteur ès sciences mathématiques, rue Demours, 62 *bis*, à Paris (17e).

1896. **CARTAN**, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Suchet, 38, à Lyon.

1887. **CARVALLO**, examinateur de sortie à l'École Polytechnique, rue Clovis, 1, à Paris (5e).

1890. **CEDERCREUTZ** (baronne Nanny, née de Lagerborg), Unionsgatan, 4, à Helsingfors.

1892. **CELLÉRIER** (Gustave), quai des Eaux-Vives, 34, à Genève (Suisse).

1887. **CERRUTI**, professeur à l'Université, piazza S. Pietro in vincoli, 5, à Rome (Italie).

1888. **CHAILAN** (Édouard), rue Berthollet, 16, à Paris (5e).

1893. **CHARLIAT**, ingénieur des arts et manufactures, rue de Paradis, 46, à Paris (10e).

1896. **CHARVE**, professeur à la Faculté des Sciences, cours Pierre-Puget, 60, à Marseille.

1881. **CHEMIN**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Montaigne, 33, à Paris (8e).

1884. **CHRYSTAL**, professeur à l'Université, à Édimbourg (Écosse).

1901. **CLAIRIN**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, rue Jacquemars-Giélée, 57 *bis*, à Lille (Nord).

1875. **CLAUDE-LAFONTAINE**, banquier, rue de Trévise, 32, à Paris (9e).

1890. **COLOT**, château du Seuil, à Cérons (Gironde).

1898. **COMBEBIAC**, capitaine du génie, docteur ès sciences, à Limoges.

1900. **COMTE** (Firmin), ingénieur des ponts et chaussées, à Commercy (Meuse).

1896. **COSSERAT** (E.), professeur à la Faculté des Sciences, rue de Metz, 1, à Toulouse.

1896. **COSSERAT** (F.), ingén. en chef des ponts et chaussées, rue d'Alsace, 23, à Paris (10e).

1900. **COTTON** (Émile), professeur adjoint à l'Université de Grenoble.

1904. **CURTISS**, Lawrence street, 220, New-Haven (Connecticut, États-Unis).

1872. **DARBOUX**, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, doyen honoraire de la Faculté des Sciences, rue Gay-Lussac, 36, à Paris (5e).

1885. **DAUTHEVILLE**, doyen de la Faculté des Sciences, cours Gambetta, 27, à Montpellier (Hérault).

1882. **DELANNOY**, sous-intendant militaire en retraite, à Guéret (Creuse).

1901. **DELASSUS**, professeur à la Faculté des Sciences, chemin de Chastre-Monjoux, à Besançon.

1895. **DELAUNAY** (N.), professeur à l'Institut Polytechnique Empereur Nicolas II, à Varsovie.

1899. **DELEMER**, ingénieur des ponts et chaussées, place Simon-Vollant, 10, à Lille (Nord).

1885. **DEMARTRES**, doyen de la Faculté des Sciences, avenue Saint-Maur, à la Madeleine-lès-Lille (Nord).

1892. **DEMOULIN** (Alp.), professeur à l'Université, rue du Bas-Polder, 20, à Gand (Belgique).

1897. **DENIS** (Henry), élève libre à l'École d'application du Génie maritime, rue de Fleurus, 23, à Paris (6e).

1883. **DERUYTS**, professeur à l'Université, rue des Augustins, 35, à Liége (Belgique).

1894. **DESAINT**, docteur ès sciences, boulevard Gouvion-Saint-Cyr, 47, à Paris (17e).

1900. **DICKSTEIN**, Marszatkowska, 117, Varsovie.

1902. **DIEGUEZ** (D.-F.), professeur de mathématiques à l'École provinciale des Arts et Industries, calle del Orzan, 4-3o, a La Corogne (Espagne).

Date de l'admission.

1899. **DRACH** (Jules), chargé de cours à la Faculté des Sciences, rue des Carmélites, 68, à Poitiers.

1896. **DUMAS** (G.), docteur de l'Université de Paris, privat-docent à l'École Polytechnique fédérale, à Zurich (Suisse).

1897. **DUMONT**, professeur au lycée, rue Royale, 10, à Annecy (Haute-Savoie).

1886. **DUNCAN**, Consulting Engineer, Empire Building, Broadway, 71, New-York City.

1897. **DURAN-LORIGA**, command. d'artillerie, plaza de Maria Pita, 20, à la Corogne (Espagne).

1885. **DYCK** (Walther), Technische Hochschule, à Munich (Bavière).

1902. **EGOROFF** (Dimitri), professeur à l'Université, Razgoulaï, 2e gymnase, à Moscou (Russie).

1903. **ESPANET**, ingénieur civil, rue Berthollet, 2, à Paris (5e).

1900. **ESTANAVE**, docteur ès sciences, à la Sorbonne, à Paris (5e).

1900. **ESTIENNE**, capitaine au 19e régiment d'artillerie, à Nice.

1896. **EUVERTE**, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien capitaine d'artillerie, ingénieur aux Forges de Denain (Nord).

1888. **FABRY**, professeur à la Faculté des Sciences, 17, rue Chaptal, à Montpellier (Hérault).

1904. **FATOU**, astronome-adjoint à l'Observatoire, rue des Ursulines, 15, à Paris (5e).

1891. **FAUQUEMBERGUE**, professeur au lycée, à Mont-de-Marsan (Landes).

1892. **FEHR** (Henri), professeur à l'Université, rue Ph.-Plantamour, 19, à Genève (Suisse).

1885. **FIELDS** (J.), professeur de mathématiques, Liberty street, 21, à Hamilton (Canada).

1881. **FLOQUET**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de la Commanderie, 21, à Nancy.

1872. **FLYE SAINTE-MARIE**, chef d'escadron d'artillerie en retraite, ancien répétiteur à l'École Polytechnique, place Royer-Collard, à Vitry-le-François (Marne).

1896. **FONTANEAU**, ancien officier de marine, cours Bugeaud, 8, à Limoges (Haute-Vienne).

1897. **FONTENÉ**, inspecteur de l'Académie de Paris, rue Le Goff, 7, à Paris (5e).

1891. **FONTVIOLANT** (DE), professeur à l'École Centrale, rue d'Erlanger, 29, Paris (16e).

1903. **FORD** (WALTER B.), à Williamstown (Massachusetts, États-Unis).

1889. **FOUCHÉ**, professeur de mathématiques, rue Soufflot, 5, à Paris (5e).

1872. **FOURET**, examinateur à l'École Polytechnique, avenue Carnot, 4, à Paris (17e).

1903. **FRAÏSSÉ**, agrégé de l'Université, boulevard Saint-Germain, 203, à Paris (6e).

1904. **FRÉCHET**, agrégé de Mathématiques, rue Bausset, 7, à Paris.

1892. **FROLOV** (le général), quai des Eaux-Vives, 36, à Genève (Suisse).

1903. **FUETER**, rue de l'Abbé-de-l'Épée, 14, à Paris (5e).

1900. **GALDEANO** (Z.-S. DE), professeur à l'Université, corso 99, 3, à Saragosse.

1872. **GARIEL**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à la Faculté de Médecine, rue Édouard-Detaille, 6, à Paris (17e).

1896. **GAUTHIER-VILLARS**, ancien élève de l'École Polytechnique, éditeur, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris (6e).

1890. **GEBBIA**, professeur libre à l'Université, à Palerme (Italie).

1872. **GENTY**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, avenue Rapp, 20, à Paris (7e).

1890. **GERBALDI**, professeur à l'Université, via Daita, 11, à Palerme (Italie).

1897. **GERRANS**, professeur à Worcester College, Saint-John street, 20, à Oxford (Grande-Bretagne).

1896. **GIRARDVILLE**, capitaine d'artillerie, rue Michelet, 6, à Montreuil-sous-Bois (Seine).

1903. **GODEY**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue du Bois-de-Boulogne, 7, à Paris (16e).

Date de l'admission.

1881. **GOURSAT**, professeur à la Faculté des Sciences, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Raspail, 270, à Paris (14e).

1896. **GREENHILL**, professeur à l'École d'artillerie, à Woolwich (Grande-Bretagne).

1896. **GRÉVY**, professeur au lycée Saint-Louis, rue Saint-Placide, 62, à Paris (6e).

1899. **GUADET**, ancien élève de l'École Polytechnique, boulevard Saint-Germain, 240 *bis*, à Paris (7e).

1880. **GUCCIA** (Jean), professeur à l'Université, via Ruggiero Settimo, 30, à Palerme (Italie).

1900. **GUICHARD**, professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.

1891. **GUIMARAES**, officier du génie, à l'Académie des Sciences, rue Nova da Piedade, 55, à Lisbonne (Portugal).

1881. **GUNTHER** (Dr Sigismond), professeur à l'École Polytechnique, à Munich (Bavière).

1885. **GUYOU**, membre de l'Institut, capitaine de frégate, rue de l'Université, 13, à Paris (7e).

1873. **HAAG**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, professeur à l'École Polytechnique, rue Chardin, 11 *bis*, à Paris (16e).

1882. **HABICH**, directeur de l'École des Ingénieurs, à Lima (Pérou).

1896. **HADAMARD**, professeur adjoint à la Faculté des Sciences, professeur suppléant au Collège de France, rue Humboldt, 25, à Paris (14e).

1904. **HALBERSTADT**, ingénieur des Arts et Manufactures, rue des Boulangers, 44, à Paris (5e).

1894. **HALSTED**, professeur à Kenyon Collège, à Gambier (Ohio, États-Unis).

1901. **HANCOCK** (Harris), professeur à l'Université de Cincinnati, Auburn Hotel (Ohio, États-Unis).

1900. **HARDEL**, villa italienne, à Dieppedalle-Croisset (Seine-Inférieure).

1872. **HATON DE LA GOUPILLIÈRE**, membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur honoraire de l'École des mines, rue de Vaugirard, 56, à Paris (6e).

1892. **HERMANN**, libraire-éditeur, rue de la Sorbonne, 8, à Paris (5e).

1893. **HIOUX**, professeur en retraite, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5e).

1879. **HOLST** (Elling), professeur à l'École Polytechnique, à Hövik, près Christiania (Norvège).

1895. **HOTT** (Stanislas), professeur à l'École Ste-Geneviève, rue Bausset, 4, à Paris (15e).

1880. **HUMBERT**, membre de l'Institut, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Daubigny, 6, à Paris (17e).

1881. **IMBER**, directeur des études à l'École Centrale, 33, boulevard Voltaire, à Paris (11e).

1903. **ISSALY** (l'abbé), rue Poquelin-Molière, 9, à Bordeaux.

1896. **JACQUET** (E.), professeur au Prytanée militaire, rue Couchot, 8, à la Flèche.

1898. **JAHNKE**, privat docent à l'École Polytechnique de Charlottenburg, Ludwigskirstrasse, 6, à Berlin W15 (Allemagne).

1898. **JARRY** (N.), ingénieur civil, avenue du Bel-Air, 7, à Paris (12e).

1872. **JAVARY**, chef de bataillon du génie en retraite, chef des travaux graphiques à l'École Polytechnique, rue du Cardinal-Lemoine, 1, à Paris (5e).

1903. **JENSEN** (J.-L.-W.-V.), ingénieur en chef des Téléphones, Gl. Kongevej, 80, à Copenhague, V (Danemark).

1872. **JORDAN**, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, rue de Varenne, 48, à Paris (7e).

1875. **JUNG**, professeur à l'Institut technique supérieur, via Fatebenefratelli, 19, à Milan (Italie).

1890. **KOBB** (Gustaf), maître de conférences à l'Université, à Stockholm (Suède).

1892. **KOCH** (H. von), maître de conférences à l'Université, à Djursholm-Stockholm (Suède).

Date de l'admission.

1880. **KŒNIGS**, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, répétiteur à l'École Polytechnique, boulevard Arago, 101, à Paris (14e).

1897. **LACAUCHIE**, ingénieur civil, chef du laboratoire de la Compagnie générale des Omnibus, rue de Douai, 48, à Paris (9e).

1873. **LAISANT**, docteur ès sciences, répétiteur et examinateur à l'École Polytechnique, avenue Victor-Hugo, 162, à Paris (16e).

1893. **LANCELIN**, astronome adjoint de l'Observatoire, rue Boissonnade, 3, à Paris (14e).

1899. **LANDAU** (Edmond), privat-docent à l'Université, Sommerstrasse, 2, Berlin, N. W.

1896. **LAROSE**, ingénieur des télégraphes, cité Martignac, 5, à Paris (7e).

1896. **LAUGEL**, ancien attaché d'ambassade, villa Ensoleillée, à Beaulieu-sur-Mer (Alpes-Maritimes).

1873. **LAUTH**, manufacturier, à Thann (Alsace).

1896. **LEAU**, professeur au lycée Michelet, rue Vavin, 6, à Paris (6e).

1880. **LÉAUTÉ**, membre de l'Institut, boulevard de Courcelles, 18, à Paris (17e).

1896. **LEBEL**, professeur au lycée de Montpellier, villa Mont-Carmel, avenue Bouisson-Bertrand, à Montpellier.

1902. **LEBESGUE**, docteur ès sciences, maître de conférences à la Faculté des Sciences, boulevard de la Liberté, 11, à Rennes (Ille-et-Vilaine).

1903. **LEBEUF**, directeur de l'observatoire de Besançon.

1893. **LECORNU**, ingénieur en chef des mines, professeur à l'École Polytechnique, rue Gay-Lussac, 3, à Paris (5e).

1895. **LEMERAY**, licencié ès sciences, ingénieur civil du génie maritime, boulevard de l'Océan, 51, à Saint-Nazaire (Loire-Inférieure).

1872. **LEMOINE** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, place Pereire, 5, à Paris (17e).

1901. **LEMOYNE** (T.), rue Champollion, 11, à Paris (5e).

1879. **LE PAIGE**, professeur à l'Université, à l'observatoire de Cointe, à Liége (Belgique).

1895. **LE ROUX**, professeur à la Faculté des Sciences, rue de Châteaudun, 17, à Rennes.

1898. **LE ROY**, docteur ès sciences, rue Notre-Dame-des-Champs, 27, à Paris (6e).

1891. **LERY**, agent voyer d'arrondissement, à Pontoise (Seine-et-Oise).

1900. **LEVI CIVITA** (T.), professeur à l'Université, via Altinate, 14, à Padoue (Italie).

1882. **LÉVY** (Lucien), répétiteur et examinateur d'admission à l'École Polytechnique, rue du Regard, 12, à Paris (6e).

1872. **LÉVY** (Maurice), membre de l'Institut, inspecteur général des ponts et chaussées, professeur au Collège de France, avenue du Trocadéro, 15, à Paris (16e).

1875. **LEZ** (Henri), à Lorrez-le-Bocage (Seine-et-Marne).

1898. **LINDELÖF** (Ernst), professeur à l'Université, Nylandsgatan, 15, à Helsingfors (Finlande).

1877. **LINDEMANN**, professeur à l'Université, Franz-Josephstrasse, 12, à Munich (Bavière).

1886. **LIOUVILLE**, ingénieur des poudres, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, quai Henri-IV, 12, à Paris (4e).

1900. **LOVETT** (E.-O), professeur à Princeton University, New-Jersey (États-Unis).

1888. **LUCAS** (Félix), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Boissière, 30, à Paris (16e).

1902. **LUCAS-GIRARDVILLE**, ingénieur des manufactures de l'État, Manufacture des Tabacs, à Toulouse.

1902. **LUCAS DE PESLOUAN**, ancien élève de l'École Polytechnique, rue Marbeuf, 8, à Paris (8e).

1886. **LYON**, docteur ès sciences mathématiques, chemin de la Roseraie, 26, à Genève (Suisse).

1882. **MACÉ DE LÉPINAY**, professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV, rue Claude-Bernard, 79, à Paris (5e).

1895. **MAILLET**, docteur ès sciences, ingénieur des ponts et chaussées, rue de Fontenay, 11, à Bourg-la-Reine (Seine).

Date de l'admission.

1872. **MANNHEIM**, colonel d'artillerie en retraite, professeur honoraire à l'École Polytechnique, boulevard Beauséjour, 1, à Paris (16e).

1903. **MAROTTE**, professeur au lycée Charlemagne, rue de Reuilly, 35 *bis*, à Paris (12e).

1884. **MARTIN** (Artemas), N. Street, 915, N. W., à Washington D. C. (États-Unis).

1889. **MARTIN** (Émile), ancien élève de l'École Polytechnique, professeur de mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 22, à Paris (5e).

1901. **MASSAU** (J.), professeur à l'Université, rue Maruix, 22, à Gand (Belgique).

1894. **MAUPIN**, professeur au collège, rue de l'Arceau, 30, à Saintes (Charente-Inférieure).

1897. **MEHMKE**, professeur à l'École technique supérieure, Weisseinburgstrasse, 29, à Stuttgart (Wurtemberg).

1889. **MENDIZABAL TAMBOREL** (DE), membre de la Société de Géographie de Mexico, calle de Jesus, 13, à Mexico (Mexique).

1884. **MERCEREAU**, licencié ès sciences, rue de l'Université, 193, à Paris (7e).

1902. **MERLIN** (E.), avenue Négrié, 46, à Forest-lès-Bruxelles (Belgique).

1902. **MESNY** (R.), professeur d'hydrographie à Saint-Tropez (Var).

1904. **METZLER**, professeur à l'Université, à Syracuse (État de New-York).

1893. **MICHEL** (François), chef de parcours de la Compagnie des chemins de fer du Nord, faubourg Saint-Denis, 210, à Paris (10e).

1899. **MILLER** (Dr G.-A.), professeur à Stanford University, Californie (États-Unis).

1873. **MITTAG-LEFFLER**, professeur à l'Université, à Stockholm (Suède).

1904. **MIWA**, professeur à l'Université de Kyoto (Japon).

1902. **MOLK** (J.), professeur à la Faculté des Sciences, rue d'Alliance, 8, à Nancy.

1897. **MONTCHEUIL** (l'abbé DE), rue du Vieux-Raisin, 11, à Toulouse (Haute-Garonne).

1898. **MONTESSUS DE BALLORE** (vicomte Robert DE), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, boulevard de la Liberté, 121, à Lille (Nord).

1903. **MULLER** (J.-O.), Kirchweg, 1e, à Göttingen (Allemagne).

1898. **NAUD** (C.), éditeur, rue Racine, 3, à Paris (6e).

1885. **NEUBERG**, professeur à l'Université, rue Sclessin, 6, à Liége (Belgique).

1897. **NICOLLIER**, professeur, à Montreux (Suisse).

1903. **NIELS NIELSEN**, inspecteur général de l'enseignement secondaire, Norrebrogade, 57, à Copenhague (Danemark).

1900. **NIEWENGLOWSKI**, docteur ès sciences, inspecteur général de l'Université, rue de l'Arbalète, 35, à Paris (5e).

1882. **OCAGNE** (M. D'), ingénieur des ponts et chaussées, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École Polytechnique, rue La Boëtie, 30, à Paris (8e).

1873. **OVIDIO** (Enrico D'), professeur à l'Université, Corso-Oporto, 30, à Turin (Italie).

1901. **PADÉ** (H.), professeur à l'Université, rue de Turenne, 89, à Bordeaux.

1893. **PAINLEVÉ**, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Polytechnique, rue d'Assas, 33, à Paris (6e).

1888. **PAPELIER** (Georges), professeur de mathématiques spéciales au lycée, rue de Recouvrance, 20, à Orléans (Loiret).

1881. **PARAF**, professeur-adjoint à la Faculté des Sciences, à Toulouse.

1881. **PELLET**, doyen de la Faculté des Sciences, rue Pascal, 30, à Clermont-Ferrand.

1900. **PERCHOT**, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, avenue de l'Observatoire, 1 (5e).

1874. **PERCIN**, général de division, rue de la Faisanderie, 116, à Paris (16e).

1881. **PEROTT** (Joseph), Université Clark, à Worcester (Massachusetts, États-Unis).

1873. **PERRIN**, inspecteur général des mines, rue de Grenelle, 80, à Paris, (7e).

1892. **PERRIN** (Élie), professeur de mathématiques, rue Tarbé, 3, à Paris (17e).

1896. **PETROVITCH**, professeur à l'Université, Kossantch-Venac, 24, à Belgrade (Serbie).

Date de l'admission.

1902. **PETROVITCH** (S.), capitaine d'artillerie de la garde, professeur adjoint à l'Académie d'artillerie Michel, Sabalkansky prospect, 17, log. 15, à Saint-Pétersbourg.

1887. **PEZZO** (DEL), professeur à l'Université, via Gennaro Serra, 75, à Naples (Italie).

1879. **PICARD** (Émile), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences et à l'École Centrale des Arts et Manufactures, rue Bara, 4, à Paris (6e).

1872. **PICQUET**, chef de bataillon du génie, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, rue Monsieur-le-Prince, 4, à Paris (6e).

1896. **PIÉRON**, inspecteur général de l'Instruction publique, rue d'Assas, 50, à Paris (6e).

1899. **PIERPONT** (James), professeur à l'Université Yale, Mansfield street, 42, à New Haven (Connecticut, États-Unis).

1882. **POINCARÉ**, membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, ingénieur en chef des mines, professeur à la Faculté des Sciences, rue Claude-Bernard, 63 (5e).

1894. **POTRON**, docteur ès sciences, rue Cassette, 24, à Paris (6e).

1872. **POLIGNAC** (prince C. DE), villa Jessie, à Cannes (Alpes-Maritimes).

1899. **PRINGSHEIM**, professeur à l'Université, Arcisstrasse, 12, à Münich (Bavière).

1896. **PRUVOST**, inspecteur général honoraire de l'Instruction publique, 11, rue de la Tour, à Paris (16e).

1902. **PUX** (Victor), ancien élève de l'Ecole Polytechnique, professeur de Mathématiques, rue des Fossés-Saint-Jacques, 16, à Paris (5e).

1896. **QUIQUET**, actuaire de la Compagnie *la Nationale*, rue Laffitte, 17, à Paris (9e).

1898. **RABUT** (Charles), ingénieur en chef des ponts et chaussées, rue Duplessis, 77, à Versailles (Seine-et-Oise).

1872. **RADAU**, membre de l'Institut, rue de Tournon, 12, à Paris (6e).

1883. **RAFFY**, professeur à la Faculté des Sciences, rue Pierre-Nicole, 7, à Paris (5e).

1903. **REMOUNDOS**, professeur de mathématiques, rue de Soultani, 17, à Athènes.

1900. **RENARD**, rue de la Tour, 7, à Paris (16e).

1903. **RICHARD**, professeur au lycée de Dijon, place du Rosoir, 1, à Dijon.

1893. **RIVEREAU** (l'abbé), professeur à l'Institut catholique, à Angers (Maine-et-Loire).

1903. **ROCHE**, agrégé de l'Université, rue d'Assas, 76, à Paris (6e).

1872. **ROUART**, ingénieur civil, rue de Lisbonne, 34, à Paris (8e).

1872. **ROUCHÉ**, de l'Institut, professeur au Conservatoire des arts et métiers, examinateur des élèves à l'École Polytechnique, boulevard St-Germain, 213, a Paris (7e).

1896. **ROUGIER**, docteur ès sciences, rue Sylvabelle, 84, à Marseille.

1885. **ROUQUET** (V.), professeur honoraire de mathématiques spéciales, à Belpech (Aude).

1900. **SALTYKOW**, maître ès sciences mathématiques, professeur à l'Institut Polytechnique, rue Pankovskaïa, 10, à Kiew (Russie).

1872. **SARTIAUX**, ingénieur en chef des ponts et chaussées, chef de l'exploitation à la Compagnie du chemin de fer du Nord, à Paris.

1885. **SAUVAGE**, professeur à la Faculté des Sciences, à Marseille (Bouches-du-Rhône).

1881. **SCHLEGEL**, professeur à l'École technique, Volmestrasse, 62, à Hagen (Allemagne).

1897. **SCHOU** (Erik), Gl. Antvorskov, à Slagelse (Danemark).

1881. **SCHOUTE**, professeur à l'Université, à Groningue (Hollande).

1901. **SEE** (Thomas-J.-J.), Observatory Mare Island (Californie).

1896. **SÉGUIER** (J.-A. DE), docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 56, à Paris (7e).

1882. **SÉLIVANOFF** (Démétrius), attaché à l'Université, Fontanka, 116, log. 16, à Saint-Pétersbourg (Russie).

1900. **SERVANT**, docteur ès sciences, rue des Saints-Pères, 8, à Paris (7e).

1900. **SPARRE** (comte Magnus DE), avenue de l'Archevêché, 7, à Lyon.

1879. **STEPHANOS** (Dr Cyparissos), professeur à l'Université, à Athènes (Grèce).

Date de l'admission.

1901. **STETSON** (Orlando), à Franklin (Massachusetts, États-Unis).

1898. **STÖRMER** (Carl), professeur à l'Université, Davesgade, 14, à Christiania (Norvège).

1903. **SUCHAR**, docteur ès sciences, rue Saint-Lazare, 43, à Paris (8e).

1904. **SUDRIA**, professeur à l'École pratique d'électricité industrielle, rue Ernest-Renan, 28, à Paris (15e).

1904. **SUNDMAN**, maître de conférences à l'Université d'Helsingfors, Villagatan, 2, Hos Rosenqvist (Finlande).

1872. **SYLOW**, professeur à l'Université, à Frederikshald (Norvège).

1896. **TANNENBERG** (DE), rue d'Assas, 118, à Paris (6e).

1875. **TANNERY**, professeur à la Faculté des Sciences, sous-directeur de l'École Normale supérieure, rue d'Ulm, 45, à Paris (5e).

1882. **TARRY** (Gaston), rue d'Isly, 19, à Alger (Algérie).

1872. **TERRIER**, professeur au collège Chaptal, avenue Léonie, 1, à Saint-Cloud (S.-et-O.).

1899. **THYBAUT** (Alexandre), docteur ès sciences, professeur au lycée Carnot, rue du Rocher, 101, à Paris (8e).

1873. **TISSOT**, ancien examinateur d'admission à l'École Polytechnique, à Voreppe (Isère).

1896. **TISSOT**, enseigne de vaisseau, professeur au *Borda*, à Brest (Finistère).

1896. **TORRES**, membre de l'Académie des Sciences, Valgame Dios, 3, à Madrid (Espagne).

1893. **TOUCHE**, lieutenant-colonel d'artillerie territoriale, rue Truffault, 23, à Paris (17e).

1872. **TRESCA**, ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite, rue du général Henrion-Berthier, 7, à Neuilly-sur-Seine (Seine).

1893. **VALLÉE-POUSSIN** (CH.-J. DE LA), professeur à l'Université, rue de Namur, 190, à Louvain (Belgique).

1904. **VAN DEUREN**, lieutenant du génie, avenue Macan, 16, à Bruxelles.

1897. **VASSILAS-VITALIS** (J.), docteur de l'Université, rue Polyclète, 5, à Athènes (Grèce).

1898. **VASSILIEF**, président de la Société physico-mathématique, à Kasan (Russie).

1901. **VESSIOT**, professeur à la Faculté des Sciences, chemin des Granges, 45, à Lyon.

1888. **VOLTERRA** (Vito), professeur à l'Université, via Lucina, 11, à Rome.

1904. **VORONOÏ**, professeur à l'Université, à Varsovie (Russie).

1900. **VUIBERT**, éditeur, boulevard Saint-Germain, 63, à Paris (5e).

1893. **WAGNER**, professeur à l'École J.-B. Say, rue Spontini, 13, à Paris (16e).

1880. **WALCKENAER**, ingénieur en chef des mines, boulevard St-Germain, 218, à Paris (7e).

1879. **WEILL**, directeur du collège Chaptal, boulevard des Batignolles, 45, à Paris (8e).

1878. **WORMS DE ROMILLY**, ingénieur en chef des mines, rue Balzac, 7, à Paris (8e).

1882. **ZABOUDSKI**, membre du Comité d'artillerie et professeur à l'Académie d'Artillerie, rue Znamenkaia, 22, à Saint-Pétersbourg (Russie).

1890. **ZAREMBA**, docteur ès sciences, professeur à l'Université de Cracovie (Autriche).

1903. **ZERVOS**, docteur de l'Université d'Athènes, rue de Lille, 48, à Paris (7e).

1881. **ZEUTHEN**, professeur à l'Université, Rosenvonget, Saint-Kanutkestrœde, 11, à Copenhague (Danemark).

1898. **ZIWET**, South Ingalls street, 644, à Ann Arbor (Michigan, États Unis).

SOCIÉTAIRES PERPÉTUELS.

ACKERMANN-TEUBNER, à Leipzig. — BENOIST (décédé). — BERDELLÉ, à Rioz. — BIENAYME (décédé). — BIOCHE, à Paris. — BISCHOFFSHEIM, à Paris. — BOBERIL (vicomte R. DU), à Rennes. — BORCHARDT (décédé). — BOREL, à Paris. — BROCARD, à Bar-le-Duc. — CANET, à Paris. — CARVALLO, à Paris. — CHASLES (décédé). — CLAUDE-LAFONTAINE, à Paris. — COTTON, à Grenoble. — FOURET, à Paris. — GAUTRIER-VILLARS (décédé). — GOURSAT, à Paris. — HALPHEN (décédé). — HALSTED, à Austin. — HADAMARD, à Paris. — HATON DE LA GOUPILLIÈRE, à Paris. — HERMITE (décédé). — HIRST (décédé). — HOTT, à Paris. — JORDAN, à Paris. — LAFFON DE LADÉBAT (décédé). — LÉAUTÉ, à Paris. — MAILLET, à Bourg-la-Reine. — MANNHEIM, à Paris. — DE MENDIZABAL TAMBOREL, à Mexico. — MERCEREAU, à Paris. — D'OCAGNE, à Paris. — PEROTT, à Worcester. — PERRIN, à Paris. — POINCARÉ, à Paris. — POLIGNAC (prince C. DE), à Cannes. — RAFFY, à Paris. — SALTYKOW, à Kiew. — SÉLIVANOFF, à Saint-Pétersbourg. — SPARRE, (comte M. DE), à Saint-Georges-de-Reneins. — SYLOW, à Frederikshald. — TANNERY (Paul) (décédé). — TARRY (G.), à Alger. — TCHEBICHEF (décédé). — VIELLARD (décédé).

LISTE

DES

PRÉSIDENTS DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DEPUIS SA FONDATION.

	MM.		MM.
1873	CHASLES.	1889	ANDRÉ (DÉSIRÉ).
1874	LAFFON DE LADÉBAT.	1890	HATON DE LA GOUPILLIÈRE.
1875	BIENAYMÉ.	1891	COLLIGNON.
1876	DE LA GOURNERIE.	1892	VICAIRE.
1877	MANNHEIM.	1893	HUMBERT.
1878	DARBOUX.	1894	PICQUET.
1879	O. BONNET.	1895	GOURSAT.
1880	JORDAN.	1896	KŒNIGS.
1881	LAGUERRE.	1897	PICARD.
1882	HALPHEN.	1898	LECORNU.
1883	ROUCHÉ.	1899	GUYOU.
1884	PICARD.	1900	POINCARÉ.
1885	APPELL.	1901	D'OCAGNE.
1886	POINCARÉ.	1902	RAFFY.
1887	FOURET.	1903	PAINLEVÉ.
1888	LAISANT.	1904	CARVALLO.

Liste des Sociétés scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société mathématique de France échange son Bulletin.

Amsterdam.....	Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	Société mathématique d'Amsterdam.	Pays-Bas.
Amsterdam.....	*Revue semestrielle des publications mathématiques.*	Pays-Bas.
Bâle.....	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.
Baltimore.....	*American Journal of Mathematics.*	États-Unis.
Berlin.....	Académie des Sciences de Berlin.	Allemagne.
Berlin.....	*Archiv für Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Berlin.....	*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*	Allemagne.
Berlin.....	*Journal für die reine und angewandte Mathematik.*	Allemagne.
Bologne.....	Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.	Italie.
Bordeaux.....	Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.	France.
Bruxelles.....	Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.	Belgique.
Bruxelles.....	Société scientifique de Bruxelles.	Belgique.
Cambridge.....	Cambridge philosophical Society.	Grande-Bretagne.
Cambridge.....	*Annals of Mathematics.*	Massachusetts.
Christiania.....	*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab.*	Norvège.
Coïmbre.....	*Jornal de Sciencias matematicas e astronomicas.*	Portugal.
Copenhague.....	*Nyt Tidsskrift for Mathematik.*	Danemark.
Cracovie.....	Académie des Sciences de Cracovie.	Autriche.
Édimbourg.....	Société Royale d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Édimbourg.....	Société mathématique d'Édimbourg.	Grande-Bretagne.
Gand.....	*Mathesis.*	Belgique.
Göttingen.....	Société Royale des Sciences de Göttingen.	Allemagne.
Halifax.....	Nova Scotian Institute of Science.	N^lle-Écosse (Canada)
Hambourg.....	Société mathématique de Hambourg.	Allemagne.
Harlem.....	Société hollandaise des Sciences.	Hollande.
Helsingfors.....	Société des Sciences de Finlande.	Finlande.
Kansas.....	Université de Kansas.	États-Unis.
Kasan.....	Société physico-mathématique.	Russie.
Kharkov.....	Annales de l'Université.	Russie.
Kharkov.....	Société mathématique de Kharkov.	Russie.
La Haye.....	Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.	Pays-Bas.
Leipzig.....	Société Royale des Sciences de Saxe.	Allemagne.
Leipzig.....	*Mathematische Annalen.*	Allemagne.
Leipzig.....	*Archiv der Mathematik und Physik.*	Allemagne.
Leipzig.....	*Bibliotheca mathematica.*	Allemagne.

Liége	Société Royale des Sciences.	Belgique.
Livourne	*Periodico di Matematica.*	Italie.
Londres	Société astronomique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société mathématique de Londres.	Grande-Bretagne.
Londres	Société Royale de Londres.	Grande-Bretagne.
Luxembourg	Institut Royal de Luxembourg.	Luxembourg.
Marseille	*Annales de la Faculté des Sciences de Marseille.*	France.
Mexico	Sociedad cientifica *Antonio Alzate.*	Mexique.
Milan	Institut Royal lombard des Sciences et Lettres.	Italie.
Moscou	Société mathématique de Moscou.	Russie.
Munich	Académie des Sciences de Munich.	Bavière.
Naples	Académie Royale des Sciences physiques et mathématiques de Naples.	Italie.
New-Haven	Académie des Sciences et Arts du Connecticut.	États-Unis.
New-York	American mathematical Society.	États-Unis.
Odessa	Société des naturalistes de la Nouvelle-Russie.	Russie.
Palerme	*Rendiconti del* Circolo matematico.	Italie.
Paris	Académie des Sciences de Paris.	France.
Paris	Association française pour l'avancement des Sciences.	France.
Paris	Société philomathique de Paris.	France.
Paris	*Bulletin des Sciences mathématiques.*	France.
Paris	*Journal de l'École Polytechnique.*	France.
Paris	Institut des Actuaires français.	France.
Paris	*Intermédiaire des Mathématiciens.*	France.
Pise	École Royale Normale supérieure de Pise.	Italie.
Pise	Université Royale de Pise.	Italie.
Pise	*Il Nuovo Cimento.*	Italie.
Prague	Académie des Sciences de Bohême.	Autriche.
Prague	*Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky.*	Autriche.
Prague	Société mathématique de Bohême.	Autriche.
Rome	Académie Royale des *Lincei.*	Italie.
Saint-Pétersbourg	Académie Impériale des Sciences.	Russie.
Stockholm	*Acta Mathematica.*	Suède.
Tokyo	Mathematico-physical Society.	Japon.
Toulouse	*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.*	France.
Turin	Académie des Sciences.	Italie.
Upsal	Société Royale des Sciences d'Upsal.	Russie.
Varsovie	Prace Matematyczno Fizyczne.	Suède.
Venise	Institut Royal vénitien des Sciences, Lettres et Arts.	Italie.
Vienne	Académie Impériale des Sciences de Vienne.	Autriche.
Vienne	*Monatshefte für Mathematik und Physik.*	Autriche.
Washington	Philosophical Society.	États-Unis.
Zurich	Naturforschende Gesellschaft.	Suisse.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 5 JANVIER 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

La Société, réunie en Assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et à l'élection de membres du Conseil.

Elle entend et approuve le Rapport de la Commission des finances sur l'exercice 1903-1904.

Communications :

M. Laisant : *Sur les surfaces unilatérales.*

M. Fatou : *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.*

M. Raffy : *Sur la condition générale d'isothermie des lignes de courbure.*

SÉANCE DU 19 JANVIER 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Andoyer : *Sur la sommation des séries.*

M. Denjoy : *Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles.*

M. Fatou : *Sur les nombres premiers.*

M. Lebesgue : *Sur la convergence des séries de Fourier.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES MOUVEMENTS D'UNE NAPPE SOUTERRAINE, PARTICULIÈREMENT DANS LES TERRAINS PERMÉABLES, SPONGIEUX ET FISSURÉS [1];

Par M. Edmond Maillet.

I.

Nous déterminerons ici principalement :

1° Les équations indéfinies du mouvement de la nappe dans un pareil terrain, particulièrement dans les périodes où il ne reçoit pas d'apports extérieurs.

2° Les formes du fond de la nappe pour lesquelles il y a un régime où l'épaisseur de la nappe ne dépend que du temps. Il y a alors un régime où le débit de chaque source est de la forme

$$Q = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$
$$(\alpha_1, \alpha_2 > 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, C_1, C_2 \text{ const.}).$$

3° Le cas d'un fond horizontal.

II.

Considérons une nappe souterraine dont le fond a pour équation (dans un système d'axes rectangulaires, Oz étant vertical)

$$z_0 = f_0(x, y), \tag{1}$$

et la surface

$$z = f(x, y, t). \tag{2}$$

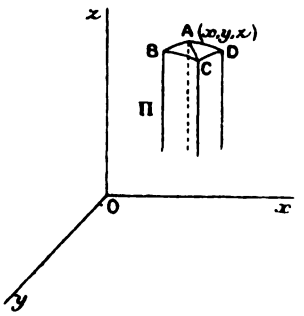
Supposons qu'en chaque point l'élément de surface de la nappe dont la projection sur Oxy est $dx\,dy$ reçoive un apport superficiel venant de l'extérieur $\chi\,dx\,dy\,dt$, pendant le temps dt (χ fonction de x, y et t).

---

[1] Ce Mémoire a été déposé à la séance du 17 novembre 1904. (*Note de la Réd.*)

Considérons alors ce qui se passe à l'intérieur du prisme indéfini Π dont $dx\,dy$ est la section droite (*fig.* 1).

Fig. 1.



Nous admettrons, d'après les expériences de Dupuit, que la vitesse horizontale moyenne v_l sur la verticale en un point A est dirigée dans le plan tangent vertical à la ligne de plus grande pente AC de la surface et proportionnelle à la pente de cette ligne, c'est-à-dire

$$v_l = k\frac{\partial z}{\partial l} \tag{3}$$

(k constante spécifique du terrain); elle est orientée du côté où z décroît sur la surface de la nappe; l désigne une longueur comptée suivant la tangente en (x, y) à la projection P de la ligne de plus grande pente sur Oxy. On a alors

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l}, \tag{4}$$

et, si n indique une direction normale à l en (x, y) dans le plan Oxy,

$$\frac{\partial z}{\partial n} = 0 = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}, \tag{5}$$

puisque l est pris sur une ligne de plus grande pente.

Soit α l'angle de Ox et de la tangente à P en (x, y) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial l} = \cos\alpha = \dfrac{\partial y}{\partial n}, \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial l} = \sin\alpha = -\dfrac{\partial x}{\partial n}; \end{cases}$$

d'après (5),

$$\frac{\partial z}{\partial x}\sin\alpha = \frac{\partial z}{\partial y}\cos\alpha,$$

et, d'après (4),

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Si v_x et v_y sont les composantes de v_l suivant Ox et Oy, d'après (3),

$$(6)\qquad \begin{cases} v_x = v_l\cos\alpha = k\dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ v_y = v_l\sin\alpha = k\dfrac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

Ceci posé, cherchons l'équation de continuité, en examinant ce qui se passe dans le prisme Π pendant le temps dt.

Le volume qui entre à travers la face AB, parallèle à Oyz, est

$$-k\varphi\, dy\, dt(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x};$$

il faut le signe —, car l'expression doit être positive quand $\frac{\partial z}{\partial x}$ est négatif; φ est la proportion du vide par unité de surface dans le terrain.

Le volume qui sort à travers la face CD est

$$-k\varphi\, dy\, dt\left\{(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x} + dx\frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right]\right\}.$$

Le prisme perd ainsi

$$-k\varphi\, dx\, dy\, dt\frac{\partial}{\partial x}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right].$$

Il perd, à travers les faces parallèles à Oxz,

$$-k\varphi\, dx\, dy\, dt\frac{\partial}{\partial y}\left[(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Le prisme gagne d'autre part

$$\chi\, dx\, dy\, dt,$$

apport des parties du terrain non comprises dans la nappe au

temps t et situées au-dessus de la surface libre de celle-ci; cet apport se fait par le haut.

Enfin, à la partie supérieure, le volume de la nappe contenu dans le prisme augmente de

$$\varphi\, dx\, dy\, dt \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Il en résulte

$$(7) \qquad \frac{\chi}{\varphi} = \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[k(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial y}\right].$$

Cette équation, quand on y fait $\chi = 0$, se réduit à une équation indiquée par M. Boussinesq [1]; quand on y suppose les mouvements parallèles au plan Oxz, elle se réduit, χ étant quelconque, à une équation indiquée par moi [2].

Elle permettra, par exemple, d'aborder l'étude du mouvement dans une nappe alimentée par les pluies [3], quand on suppose que le mouvement se fait parallèlement à Oxz.

Elle permet encore d'étudier les mouvements d'une nappe dans un terrain perméable et spongieux. Nous allons nous occuper d'un des cas que l'on peut y rencontrer.

III.

Nous supposerons dorénavant un terrain perméable formé de masses de petites dimensions susceptibles de s'imbiber d'eau à certains moments ou de restituer à d'autres moments cette eau d'imbibition. L'eau qui pénètre dans ce terrain, l'eau de pluie par exemple, imbibe en partie les masses qu'elle rencontre, gagne en partie la partie inférieure [4] où l'eau circule entre les vides des

---

(1) *Comptes rendus*, 22 juin 1903, p. 1511. Nous suivons ici une marche assez analogue; nous supposons, dans ce qui précède, k constant; mais (7) subsiste évidemment quand k varie dans l'étendue de la nappe.

(2) Équation (21 *bis*), p. 55 de mes *Essais d'Hydraulique souterraine et fluviale*. Paris, Hermann, 1904.

(3) *Ibid.*

(4) *Voir* mes *Essais d'Hydraulique* précités, p. 136, 204-205 et 216. Dans le terrain considéré, la nappe est la partie où non seulement les masses en question sont complètement imbibées, mais encore où l'eau remplit tous les intervalles entre ces masses, intervalles qui forment des canaux capillaires.

masses. Voyons ce qui se passe quand il n'y a plus d'apports extérieurs (par la surface du terrain par exemple), ou quand ils sont négligeables.

Sur la verticale qui se projette au point (x, y), au temps t, la nappe occupe l'espace compris entre le fond, d'ordonnée z_0, et la surface libre de la nappe, d'ordonnée z. Au-dessus, jusqu'au point d'ordonnée z_1 par exemple, règne un terrain imbibé qui laisse échapper d'une manière continue son eau d'imbibition suivant une certaine loi. Dans cette partie, un petit volume ϖ, en (x, y, z_2), perd, pendant le temps dt, la quantité d'eau d'imbibition

$$k_1 \varpi \Phi(t, z_2)\, dt, \qquad (k \text{ const.}),$$

que nous admettons [1], par hypothèse, être proportionnelle au volume d'eau d'imbibition $\varpi \Phi(t, z_2)$ contenu au temps t dans ϖ. On aura ainsi

$$k_1 \varpi \Phi(t, z_2)\, dt + \varpi \Phi'_t(t, z_2)\, dt = 0$$

ou

$$(8) \qquad k_1 \Phi(t, z_2) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

On peut alors considérer l'apport $\chi\, dx\, dy\, dt$ dans le prisme Π comme étant au temps t, la somme des apports des masses $dx\, dy\, dz$ situées dans ce prisme entre z et z_1, l'eau perdue par les masses ϖ étant supposée se mouvoir verticalement vers le bas, et ne pas profiter aux masses ϖ inférieures situées au-dessus de la surface libre de la nappe; on négligera le temps relativement faible que met l'apport $k_1 \varpi \Phi(t, z_2)\, dt$ pour parvenir en (x, y, z). On aura alors

$$\chi\, dx\, dy\, dt = dx\, dy\, dt \int_z^{z_1} k_1 \Phi(t, z_2)\, dz_2,$$

$$(9) \qquad \chi = k_1 \int_z^{z_1} \Phi(t, z_2)\, dz_2.$$

Cette hypothèse paraît assez plausible *dans des terrains spongieux très fissurés verticalement.*

---

[1] Comp. *Essais* ci-dessus, p. 204; $\Phi(t, z_2)$ peut dépendre de x et y.

Faisons croître t de dt; on a, d'après (9),

$$\chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} dt = k_1 \int_{z + \frac{\partial z}{\partial t} dt}^{z_1} \Phi(t + dt, z_2)\, dz_2$$

$$= k_1 \int_z^{z_1} \Phi(t, z_2)\, dz_2 + k_1\, dt \int_z^{z_1} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dz_2$$

$$+ k_1 \int_{z + \frac{\partial z}{\partial t} dt}^{z} \Phi(t, z_2)\, dz_2,$$

ou

$$\chi + \frac{\partial \chi}{\partial t} dt = \chi - k_1\, dt \int_z^{z_1} k_1 \Phi(t, z_2)\, dz_2 - k_1 \Phi(t, z) \frac{\partial z}{\partial t} dt,$$

ou

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = - k_1 \chi - k_1 \mathrm{A} \frac{\partial z}{\partial t}, \qquad (\mathrm{A\ const.}),$$

puisque, au contact de la nappe, dont le niveau est supposé s'abaisser, l'imbibition des volumes ϖ que la nappe vient d'abandonner est encore complète, et que $\Phi(t, z) = \mathrm{A} = \text{const.}$ L'équation permettant de définir χ est donc

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + k_1 \chi + k_1 \mathrm{A} \frac{\partial z}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Les équations indéfinies du mouvement dans le terrain perméable, spongieux et fissuré verticalement sont ici les équations (7) *et* (10).

IV.

Mouvements où l'épaisseur de la nappe ne dépend que du temps. — On peut encore se proposer de chercher quelles sont les formes de nappes où l'épaisseur peut ne dépendre que du temps (c'est-à-dire être la même partout à chaque instant), comme nous l'avons fait pour les nappes en terrains perméables, mais non spongieux [1] (sensiblement). Posons

$$z = z_0 + \psi,$$

où ψ ne dépend que de t,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_0}{\partial y}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{d\psi}{dt}.$$

---

[1] *Essais d'Hydraulique* précités, p. 48, 53, 55.

(7) et (10) deviennent

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\chi}{\varphi} - \dfrac{d\psi}{dt} + k\psi\left(\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial t} + k_1\chi + k_1 A\dfrac{d\psi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Eliminons χ : nous adjoindrons à ces deux équations la première équation (11) dérivée par rapport au temps :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{d^2\psi}{dt^2} + k\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\varphi} & 0 & -\dfrac{d\psi}{dt} + k\psi\left(\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) \\ k_1 & 1 & k_1 A\dfrac{d\psi}{dt} \\ 0 & \dfrac{1}{\varphi} & -\dfrac{d^2\psi}{dt^2} + k\dfrac{d\psi}{dt}\left(\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Développons :

$$\frac{1}{\varphi}\left[-\frac{d^2\psi}{dt^2} + k\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right)\right] + \frac{k_1}{\varphi}\left[-\frac{d\psi}{dt} + k\psi\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right)\right] - \frac{k_1}{\varphi^2}A\frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$$(12)\qquad k\left(\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}\right)\left[\frac{d\psi}{dt} + k_1\psi\right] = \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt}\left(k_1 + k_1\frac{A}{\varphi}\right).$$

Il en résulte de suite que l'on a : soit

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 2c = \text{const.},$$

soit

$$(14)\qquad \frac{d\psi}{dt} + k_1\psi = 0.$$

Premier cas : (14) *a lieu.* — On devra avoir en même temps, d'après (12) :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1\frac{A}{\varphi}\right)\frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dt} + k_1\psi = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k_1\frac{d\psi}{dt} = 0,$$

d'où

$$k_1 \frac{A}{\varphi} \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

$\psi = \text{const.} = 0 = \chi$, ce qui est absurde, ou $A = 0$, ce qui est impossible, le terrain étant spongieux. Finalement, (14) n'a pas lieu.

Deuxième cas : (13) *a lieu.* — (12) devient

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc\right)\frac{d\psi}{dt} - 2kk_1 c\psi = 0.$$

C'est une équation linéaire à coefficients constants, dont l'intégrale générale est (sauf un cas particulier où $\alpha_1 = \alpha_2$),

$$\psi = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

α_1, α_2 étant les racines de l'équation

$$\alpha^2 - \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc\right)\alpha - 2kk_1 c = 0.$$

Nous supposerons $c < 0$. Alors

$$\begin{aligned}\delta &= \left(k_1 + k_1 \frac{A}{\varphi} - 2kc\right)^2 + 8kk_1 c \\ &= (k_1 - 2kc)^2 + 2(k_1 - 2kc)\frac{k_1 A}{\varphi} + \frac{k_1^2 A^2}{\varphi^2} + 8kk_1 c \\ &= (k_1 + 2kc)^2 + 2(k_1 - 2kc)\frac{k_1 A}{\varphi} + \frac{k_1^2 A^2}{\varphi^2}\end{aligned}$$

est essentiellement positif [1], et α_1, α_2 sont réels; d'après $c < 0$, α_1, α_2 sont positifs.

Les surfaces (13) ont leur équation de la forme

$$z_0 = f(x + yi) + f_1(x - yi) + c\frac{x^2 + y^2}{2}.$$

---

[1] Dans la pratique, $2kc$ sera sans doute parfois petit par rapport à k_1 (*voir* mes *Essais d'Hydraulique* précités, p. 194, 202-203, 204-206, par exemple), et l'expression δ sera > 0, d'où $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Il en résulte pratiquement qu'une des racines α_1 est petite par rapport à l'autre α_2. Alors, dans les limites de la pratique, une expression de la forme $\psi = C_1 + C_2 e^{-\alpha_2 t}$ pourra représenter χ avec une approximation suffisante. Une expression analogue pourra également suffire pour représenter à peu près le débit d'une source issue de la nappe.

Toutefois, d'après moi, cette théorie semblerait pouvoir plutôt s'appliquer aux sources à variation de débit assez rapide. Ce n'est d'ailleurs qu'une opinion provisoire.

Un cas particulièrement intéressant est celui où le mouvement le fait parallèlement à Oxz, le fond étant un cylindre de génératrices parallèles à Oy. Alors, d'après (13),

$$\frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} = 2c,$$

$$z_0 = a + bx + cx^2 \qquad (c < 0).$$

Le fond est un cylindre parabolique convexe. A la limite amont de la nappe, au sommet de la parabole, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} = b + 2cx = 0$; le débit

$$Q = B(z - z_0)\frac{\partial z}{\partial x}$$

y est nul. Le débit par unité de largeur de la nappe en un point quelconque est

$$Q = B_1 \psi (b + 2cx);$$

par suite, sous certaines hypothèses [1], le débit d'une source alimentée par cette nappe est de la forme $Q = B_2 \psi$. Donc, appelant encore *régime propre ou non influencé de la nappe en terrain spongieux et fissuré verticalement* celui où elle ne reçoit d'autres apports extérieurs que les pertes d'eau d'imbibition faites par le terrain spongieux situé au-dessus de cette nappe, nous pouvons dire :

Soit une nappe en terrain perméable spongieux et fissuré verticalement dont le fond est un cylindre parabolique convexe de génératrices parallèles à Oy, *d'ordonnée*

$$z_0 = a + bx + cx^2 \qquad (c < 0);$$

il existe pour cette nappe un régime propre ou non influencé où l'épaisseur ψ *de la nappe est à l'instant* t *la même dans toute l'étendue de la nappe* [2]. *On a en général*

$$\psi = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

---

(1) *Essais d'Hydraulique* précités, p. 9. Dans le régime considéré ici, d'après (11), χ est fonction de t seul.

(2) Comme dans le cas où $A = \gamma = 0$. Comp. *Essais d'Hydraulique* précités, p. 48.

avec α_1, $\alpha_2 > 0$. *Au voisinage d'une verticale quelconque donnée, le débit est proportionnel à* ψ.

Dans un cas étendu, le débit d'une source alimentée par cette nappe est proportionnel à ψ.

Nous pouvons encore chercher à étudier si ces nappes peuvent avoir, à la suite d'une pluie uniforme tombant dans leur étendue, le même régime, avec, au besoin, des valeurs différentes des constantes C_1 et C_2.

Aussitôt après la cessation de la pluie, la fonction $\Phi(t, z_2)$, peut-être aussi la limite z_1, vont se trouver modifiées; mais l'on voit encore que les mêmes calculs sont applicables. La solution trouvée reste encore valable; les valeurs de C_1 et C_2 pourront être modifiées.

On peut encore chercher les solutions de (7) et (10), où χ est fonction du temps seul. D'après (10), $\frac{\partial z}{\partial t}$ est fonction du temps seul, et

$$z = z_0 + \zeta + \psi,$$

où ψ est fonction de t, ζ fonction de x et y.

On substituera dans (7), et, pour continuer, on s'inspirera de ce que nous avons fait ailleurs [1]. On retrouvera, bien entendu, la solution précédente où $\zeta = 0$.

V.

Cas d'un fond horizontal $z_0 = 0$. — Comme l'a fait remarquer M. Boussinesq [2] pour le cas où

$$A = \chi = 0,$$

on peut encore ici chercher une solution z de la forme

$$z = \psi(t)\zeta(x, y),$$

où ζ ne dépend pas de t, ψ ne contenant que t.

---

[1] Surtout dans le cas où $\frac{\partial z_0}{\partial y} = 0$; voir *Essais d'Hydraulique* précités, p. 45 et suiv.

[2] *Comptes rendus*, 6 juillet 1903, p. 5 et suivantes.

(7) et (10) deviennent

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\chi}{\varphi} = \zeta\dfrac{d\psi}{dt} - k\psi^2\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right], \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial t} + k_1\chi + k_1 A\zeta\dfrac{d\psi}{dt} = 0. \end{cases}$$

Éliminons χ, en adjoignant aux équations (15) la première de ces deux équations dérivée par rapport à t :

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\chi}{\partial t} = \zeta\frac{d^2\psi}{d^2t} - 2k\psi\frac{d\psi}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right],$$

d'où

$$0 = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\varphi} & 0 & \zeta\dfrac{d\psi}{dt} - k\psi^2\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right] \\ k_1 & 1 & -k_1 A\zeta\dfrac{d\psi}{dt} \\ 0 & \dfrac{1}{\varphi} & \zeta\dfrac{d^2\psi}{dt^2} - 2k\psi\dfrac{d\psi}{dt}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\dfrac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right] \end{vmatrix},$$

ou

$$\zeta\frac{d^2\psi}{dt^2} - 2k\psi\frac{d\psi}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]$$
$$+ k_1\left\{\zeta\frac{d\psi}{dt} - k\psi^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right]\right\} + \frac{k_1 A}{\varphi}\zeta\frac{d\psi}{dt} = 0,$$

ou enfin

$$\zeta\left\{\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1\frac{A}{\varphi}\right)\frac{d\psi}{dt}\right\} = \left(2k\psi\frac{d\psi}{dt} + kk_1\psi^2\right)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\right].$$

On en conclut, λ étant une constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = \lambda\zeta,$$
$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + \left(k_1 + k_1\frac{A}{\varphi}\right)\frac{d\psi}{dt} - 2k\lambda\psi\frac{d\psi}{dt} - kk_1\lambda\psi^2 = 0.$$

La première de ces deux équations est identique à celle que M. Boussinesq a trouvée par une méthode semblable dans le cas où $A = \chi = 0$. Quand les mouvements se font parallèlement à Oxz, on a encore comme solution une valeur de ζ qui s'exprime par les fonctions elliptiques. Mais la valeur de ψ, qui renfermera deux constantes arbitraires, paraît plus compliquée.

REMARQUES SUR UN CAS DE SYMÉTRIE DANS L'ESPACE;

Par M. Ch. Bioche.

1. Il est facile de voir que, si une figure de l'espace admet pour axes de symétrie deux droites rectangulaires OX et OY, elle admet un troisième axe OZ perpendiculaire aux deux premiers; mais elle n'admet pas nécessairement pour centre de symétrie le sommet O du trièdre, ou pour plan de symétrie le plan d'une des faces. Le paraboloïde équilatère

$$XY = aZ$$

donne l'exemple le plus simple de surface admettant cette symétrie.

Je vais indiquer, relativement aux courbes gauches, quelques résultats curieux.

2. D'abord, je ferai remarquer que les équations

$$X = F_1(\tang^2\theta)\cos\theta, \qquad Y = F_2(\tang^2\theta)\sin\theta, \qquad Z = F_3(\tang^2\theta)\tang\theta,$$

où F_1, F_2, F_3 sont des fonctions arbitraires, représentent des courbes ayant pour axes de symétrie OX, OY, OZ; les points symétriques du point correspondant à une valeur θ du paramètre variable correspondent aux valeurs $-\theta$, $\pi-\theta$, $\pi+\theta$ de ce paramètre.

On peut voir qu'une courbe représentée par les équations précédentes n'admet pas, en général, l'origine comme centre de symétrie. Il en résulte qu'elle n'a pas non plus pour plan de symétrie le plan d'une des faces, car l'existence d'un plan de symétrie et d'un axe perpendiculaire entraînerait celle d'un centre, pied de cet axe sur le plan.

3. Mais une courbe ayant pour axes de symétrie OX, OY, OZ et n'ayant pas pour centre de symétrie O, peut avoir des plans de symétrie autres que les faces du trièdre. Ainsi, tandis que la courbe

$$X = a\cos\theta, \qquad Y = b\sin\theta, \qquad Z = c\tang\theta,$$

n'a aucun plan de symétrie, la courbe

$$X = a\cos\theta, \qquad Y = a\sin\theta, \qquad Z = c\sin 2\theta,$$

a pour plans de symétrie [1] les plans

$$X - Y = 0, \qquad X + Y = 0.$$

4. Parmi les courbes ayant trois axes de symétrie rectangulaires et pas de centre ou de plan de symétrie, je citerai les lignes de striction des systèmes de génératrices d'un hyperboloïde à une nappe. Ces lignes ont pour équations

$$\frac{X}{a\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cos\theta} = \frac{Y}{b\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\sin\theta} = \frac{Z}{c\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin\theta\cos\theta}$$
$$= \pm\frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}+\frac{1}{c^2}},$$

le signe à prendre dans la dernière expression dépendant du système de génératrices; θ est ici l'anomalie excentrique du pied de la génératrice sur le plan du cercle de gorge.

5. Il est encore curieux de noter que, parmi les courbes algébriques à torsion constante obtenues par M. E. Fabry (*Annales de l'École Normale,* juin 1892), il y en a possédant trois axes de symétrie rectangulaires, sans avoir un centre ou un plan de symétrie.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES;

Par M. J. Clairin.

J'ai indiqué récemment [2] une proposition qui complète sur un point les résultats démontrés par M. Goursat, relativement au nombre des invariants que peut posséder un système de caracté-

---

[1] Les points symétriques correspondent aux valeurs θ et $\frac{\pi}{2} - \theta$ ou θ et $\frac{3\pi}{2} - \theta$ du paramètre.

[2] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXII, p. 149.

ristiques d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. La démonstration que j'ai donnée est calquée sur celles qui ont été indiquées par M. Goursat : j'ai remarqué, depuis, que l'on peut procéder d'une manière un peu différente et fonder, sur les propriétés générales des caractéristiques, une démonstration presque complètement affranchie de calcul qui s'applique également au cas des caractéristiques du deuxième ordre et à celui des caractéristiques d'ordre quelconque.

Plus généralement je vais établir, par cette méthode, le théorème suivant :

Étant donnée une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes [1]

$$p_{n,0} + f(x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n-1}, p_{n-1,1}, \ldots, p_{0,n}) = 0,$$

à une racine simple λ *de l'équation*

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - \frac{\partial f}{\partial p_{n-1,1}}\lambda^{n-1} + \frac{\partial f}{\partial p_{n-2,2}}\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n \frac{\partial f}{\partial p_{0,n}} = 0$$

correspond un système de caractéristiques (C); *h désignant un nombre positif différent de zéro, le système* (C) *possède au plus un invariant d'ordre $n + h$. Si le système* (C) *se compose de caractéristiques d'ordre $n - 1$, la proposition subsiste pour les invariants d'ordre n ($h = 0$).*

Un invariant d'ordre $n + h$ du système de caractéristiques (C) est une intégrale des équations

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) - \left(\frac{d^{h+1}f}{dy^{h+1}}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1,h+1}} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-2,h+2}} + \Delta_{n-1}(\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1,h+1}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial p_{0,n+h}} + (-1)^n \Delta_1(\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{n-1,h+1}} = 0,$$

---

[1] Pour les notations, *voir* le dernier Chapitre des *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, de M. Goursat.

en posant, d'une manière générale,

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{n-i} - \frac{\partial f}{\partial p_{n-1,1}}\lambda^{n-i-1} + \ldots + (-1)^{n-i}\frac{\partial f}{\partial p_{i,n-i}}.$$

Supposons qu'il existe k invariants distincts d'ordre $n+h$: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$. Les dérivées partielles de deux quelconques de ces fonctions par rapport aux dérivées d'ordre $n+h$ de z étant proportionnelles, on peut exprimer $\Phi_2, \ldots, \Phi_k$ à l'aide de x, y, z, des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+h-1$ et de Φ_1.

Considérons une caractéristique quelconque d'ordre $n+h-1$, cette caractéristique est contenue dans une infinité de caractéristiques d'ordre $n+h$ dépendant d'une constante arbitraire : choisissons une de ces caractéristiques d'ordre $n+h$, de telle sorte que Φ_1 soit égale à une constante C_1 qui peut être prise arbitrairement, au moins entre certaines limites. D'après la définition des invariants, $\Phi_2, \ldots, \Phi_k$ sont égales à certaines constantes $C_2, \ldots, C_k$ quand on remplace les lettres qui y figurent par les quantités correspondantes à la caractéristique considérée. Mais $\Phi_2, \ldots, \Phi_k$ dépendent seulement de $x, y, z, p_{1,0}, p_{0,1}, \ldots, p_{0,n+h-1}$ et de C_1 ; ce sont donc $k-1$ invariants d'ordre $n+h-1$ du système (C).

Nous avons supposé que (C) possédait k invariants d'ordre $n+h$ et nous avons établi qu'il existait alors $k-1$ invariants d'ordre $n+h-1$; il en résulte que tous les invariants d'ordre $n+h$ s'expriment en fonction de l'un d'entre eux et des invariants d'ordre inférieur, ce que nous voulions démontrer. La démonstration s'applique aux invariants d'ordre n si le système (C) se compose de caractéristiques d'ordre $n-1$; en effet, dans ce cas, une caractéristique d'ordre $n-1$ est contenue dans une infinité de caractéristiques d'ordre n.

On pourrait, par une méthode toute semblable, établir une proposition analogue relative aux systèmes non singuliers d'équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes dans lesquels le nombre des fonctions inconnues est égal au nombre des équations.

DÉTERMINATION DES SURFACES DE RÉVOLUTION ADMETTANT UNE SURFACE DE RÉVOLUTION DONNÉE POUR SURFACE MOYENNE;

Par M. de Montcheuil.

Désignons par S la surface donnée, par S_1 les surfaces cherchées; par r, z; r_1, z_1 les coordonnées respectives des méridiens des deux surfaces.

On vérifie les relations suivantes :

$$r_1 = 2r - \frac{2}{\sqrt{1+\left(r\int\frac{dz}{r^2}\right)^2}}\int dr\sqrt{1+\left(r\int\frac{dz}{r^2}\right)^2},$$

$$z_1 = z - r^2\int\frac{dz}{r^2} + \frac{2r\int\frac{dz}{r^2}}{\sqrt{1+\left(r\int\frac{dz}{r^2}\right)^2}}\int dr\sqrt{1+\left(r\int\frac{dz}{r^2}\right)^2},$$

qui donnent la solution du problème.

Deux constantes arbitraires y figurent. L'une d'elles caractérise les diverses surfaces S_1 normales à une même congruence.

Désignons par K la seconde constante, par γ l'angle de la normale à une surface S_1 avec l'axe des z, par a une valeur particulière quelconque de r, par γ_a la valeur correspondante de γ.

On vérifie la relation

$$(1) \qquad r\int_a^r\frac{dz}{r^2} + Kr + \cot\gamma = 0.$$

D'où

$$K = -\frac{\cot\gamma_a}{a}.$$

Cette expression représente la valeur de la projection sur l'axe des z de la portion de normale à une surface S_1 comprise entre cet axe et son point de rencontre avec S.

Soient d', d'', d''' trois de ces projections, relatives à trois surfaces quelconques S_1 admettant la même surface moyenne S; d'_a, d''_a, d'''_a celles de ces projections qui passent par le point de S pour lequel on a

$$r = a.$$

Des formules (1) on déduit la relation

$$\frac{(d_a''' - d_a'')\,d_a'}{d'} + \frac{(d_a' - d_a''')\,d_a''}{d''} + \frac{(d_a'' - d_a')\,d_a'''}{d'''} = 0.$$

Cette formule permet, deux congruences de normales à des surfaces S_1 *étant données, de déterminer toutes les autres par une construction purement géométrique.* Elle permet, en effet, de déterminer les points où les normales de ces congruences rencontrent l'axe des z.

SUR LES COURBES GAUCHES DE 4e ORDRE ET DE 4e CLASSE;

Par M. Ch. Bioche.

I. — Détermination des équations des courbes en question.

1. Si l'on projette une courbe gauche d'ordre n et de classe k sur un plan, le centre de projection étant un point O de la courbe ne présentant aucune singularité, on obtient une courbe d'ordre $n-1$. Celle-ci admet pour points d'inflexion :

1° Les projections des points de contact des $k-3$ plans osculateurs qu'on peut mener de O à la courbe;

2° Les projections des points d'*inflexion linéaire,* c'est-à-dire des points où la tangente a trois points confondus avec la courbe.

Si $n=4$, la courbe est une biquadratique ou une quartique, intersection partielle d'une quadrique et d'une surface de 3e ordre. Dans ce dernier cas, la courbe admet des sécantes triples et elle est unicursale, un plan passant par une sécante triple ne coupant plus la courbe qu'en un point. Si la courbe est une biquadratique, elle ne peut admettre de point d'inflexion linéaire; sa projection a donc $k-3$ points d'inflexion; si $k=4$, cette projection est une cubique à point de rebroussement, elle est donc unicursale et il en est de même de la courbe de l'espace.

Les coordonnées des points d'une courbe gauche de 4e ordre et de 4e classe étant exprimables rationnellement en fonction d'une variable λ, l'équation qui donne les points d'intersection de cette courbe avec un plan contient un paramètre de moins que

n'en comporte l'équation générale du 4e degré; il en résulte qu'il existe entre les coefficients de l'équation une relation linéaire indépendante du plan considéré. On peut écrire cette relation

$$(1) \qquad \alpha + \beta S_1 + \gamma S_2 + \delta S_3 + \varepsilon S_4 = 0,$$

S_p représentant la somme des produits p à p des racines.

Si le plan devient osculateur, soit λ la valeur de la variable correspondant au point de contact et λ' la valeur correspondant au point où le plan coupe la courbe, la relation précédente peut s'écrire

$$(2) \qquad \alpha + \beta(3\lambda + \lambda') + 3\gamma\lambda(\lambda + \lambda') + \delta\lambda^2(\lambda + 3\lambda') + \varepsilon\lambda^3\lambda' = 0.$$

2. Pour que la courbe considérée soit de 4e classe, il faut et il suffit que la relation précédente se réduise à une relation homographique entre λ et λ'. Or on peut, par une transformation homographique à coefficients réels ou imaginaires, effectuée sur la variable λ, ramener la relation homographique qui doit exister entre λ et λ' à la forme

$$(3) \qquad \lambda' = h\lambda.$$

La relation (2) devant se réduire à la relation (3), on doit obtenir une identité si l'on remplace dans la première λ' par $h\lambda$; on voit facilement qu'on ne peut obtenir que les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0, \qquad & h = -3, \\ \alpha = \beta = \delta = \varepsilon = 0, \qquad & h = -1, \\ \alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 0, \qquad & h = -\tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

La relation homographique entre λ et λ' doit donc être l'une des suivantes :

$$\lambda' + 3\lambda = 0, \qquad \lambda' + \lambda = 0, \qquad 3\lambda' + \lambda = 0$$

et la relation (1) se réduit alors, suivant les cas, à l'une des relations

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0.$$

On voit immédiatement que le premier et le troisième cas reviennent l'un à l'autre si l'on change λ en $\frac{1}{\lambda}$; on n'a donc à con-

sidérer que les deux premiers cas. Ceux-ci sont d'ailleurs essentiellement distincts, puisque, dans le second cas, la relation entre λ et λ' est involutive, tandis qu'elle ne l'est pas dans le premier cas.

3. Dans le premier cas, l'équation en λ qui donne les points d'intersection de la courbe et d'un plan, n'ayant jamais de terme du 3e degré, les coordonnées d'un point de la courbe ont des expressions de la forme

$$X_i = A_i\lambda^4 + B_i\lambda^2 + C_i\lambda + D_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Des quatre équations on déduit que λ^4, λ^2, λ, 1 sont proportionnels à des fonctions linéaires des coordonnées, par suite que les courbes en question sont des transformées homographiques de

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}.$$

On voit de même que les courbes correspondant au second cas sont des transformées homographiques de

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1} \text{ (1)}.$$

II. — Propriétés des deux sortes de courbes de 4e ordre et de 4e classe.

4. On voit immédiatement que la courbe

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}$$

---

(1) Bien que cette Note soit consacrée à des propriétés projectives, je signalerai en passant une propriété métrique curieuse d'une des courbes en question.

Si l'on pose

$$\lambda = e^{i\theta},$$
$$X = t + iz, \qquad Y = x + iy, \qquad Z = x - iy, \qquad T = t - iz,$$

on obtient

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\sin 2\theta} = \frac{t}{\cos 2\theta}.$$

Si l'on rejette le plan $t = 0$ à l'infini, on obtient une courbe ayant pour axes de symétrie Ox, Oy, Oz et n'ayant ni centre ni plan de symétrie.

est une biquadratique, tandis que la courbe

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}$$

est située sur une seule quadrique, non développable,

$$YZ - XT = 0$$

dont un système de génératrices, celles qui rencontrent les droites $X = 0$, $Z = 0$ et $Y = 0$, $T = 0$, est formé de sécantes triples de la courbe.

Il faut 8 équations de condition pour exprimer qu'une quadrique contient la première courbe et 9 pour exprimer qu'une quadrique contient la seconde courbe. Plus généralement les équations de condition, pour qu'une surface d'ordre m contienne l'une des courbes en question, sont au nombre de $4m$ dans le premier cas, et de $4m + 1$ dans le second.

En effet, soit

$$F(X, Y, Z, T) = 0$$

l'équation générale de degré m; on a à écrire que l'une des expressions

$$F(\lambda^4, \lambda^2, \lambda, 1) \quad \text{ou} \quad F(\lambda^4, \lambda^3, \lambda, 1)$$

est identiquement nulle. Or, la première expression est un polynome en λ où manque le terme d'ordre $4m - 1$, tandis que la seconde est un polynome complet de degré $4m$.

5. La biquadratique a un point de rebroussement

$$Y = Z = T = 0,$$

la tangente en ce point étant

$$Z = 0, \qquad T = 0.$$

La projection de la courbe, faite d'un point quelconque de celle-ci, est une cubique à rebroussement dont l'unique tangente d'inflexion est la trace du plan osculateur mené par le centre de projection.

La quartique à sécantes triples a deux points d'inflexion linéaire,

$$X = Y = Z = 0, \qquad Y = Z = T = 0,$$

les tangentes étant

$$X = 0, \quad Y = 0 \quad \text{et} \quad Z = 0, \quad T = 0.$$

La projection faite d'un point de la courbe est, en général, une cubique à point double dont les tangentes d'inflexion sont : la trace du plan osculateur mené du centre de projection, et les projections des tangentes aux points d'inflexion linéaire.

Si la projection se fait d'un des points d'inflexion linéaire, on obtient une cubique à rebroussement; l'unique tangente d'inflexion est la projection de la tangente au second point d'inflexion linéaire.

6. Il est facile de reconnaître que la développable formée par les tangentes d'une biquadratique de 4e classe est du 5e ordre; tandis que la développable des tangentes à l'autre quartique de 4e classe est du 6e ordre.

Les cordes qui joignent le point de contact d'un plan osculateur à cette dernière courbe au point d'intersection engendrent une surface du 3e ordre à directrices rectilignes distinctes

$$XZ^2 - Y^2 T = 0;$$

les courbes asymptotiques sont des courbes de même nature que la quartique considérée. Cette propriété est bien connue.

Les cordes de la biquadratique qui joignent le point de contact d'un plan osculateur au point d'intersection engendrent une surface du 5e ordre. Il est facile d'exprimer les coordonnées des points de cette surface au moyen de λ et d'une autre variable; si la biquadratique est donnée par

$$X = \lambda^4, \quad Y = \lambda^2, \quad Z = \lambda,$$

la surface en question se représente par

$$X = \lambda^4 + 20\lambda^3\mu, \quad Y = \lambda^2 + 2\lambda\mu, \quad Z = \lambda - \mu,$$

ou, si l'on élimine λ et μ entre ces équations, par

$$8Z^2(2XZ^2 - 5Y^3 + XY) + (7Y^2 - 3X)^2 = 0.$$

On constate facilement que la ligne double de la surface, qui doit être du 6e ordre, puisque les sections planes sont des courbes

unicursales du 5e ordre, se compose de la biquadratique et de la conique

$$Z = 0, \qquad 7Y^2 - 3X = 0,$$

conique qu'on obtient d'ailleurs dans le premier mode de représentation en faisant $\mu = \lambda$.

La surface contient une autre conique contenue dans le plan $X = 0$.

Les lignes asymptotiques sont données par les équations

$$X = \lambda^4 + \frac{40\lambda^4}{A\lambda^4 - 1}, \qquad Y = \lambda^2 + \frac{4\lambda^2}{A\lambda^4 - 1}, \qquad Z = \lambda - \frac{2\lambda}{A\lambda^4 - 1},$$

A étant une constante. Elles sont en général du 8e ordre; pour A infini, on retrouve la biquadratique et pour $A = 0$ une courbe de même nature.

7. Si sur une biquadratique de 4e classe on prend un point M_0, si l'on mène le plan osculateur dont le point de contact n'est pas M_0, on obtient un point M_1; en continuant cette construction on obtient des points M_2, M_3, ..., M_n, ... en nombre infini. Le $n^{\text{ième}}$ point tend vers celui pour lequel le plan osculateur coupe la courbe en 4 points confondus, qui correspond à $\lambda = 0$.

Si, au contraire, l'on mène le plan osculateur en M_0 qui coupe la courbe en M'_1, on obtient des points M'_2, ..., M'_n en nombre infini, le $n^{\text{ième}}$ point tendant vers le point de rebroussement, qui correspond à $\lambda = \infty$.

On a ainsi une propriété analogue à une propriété des courbes planes du 3e ordre et de 3e classe étudiée par Clebsch (1).

Pour l'autre quartique de 4e classe le point de contact et le point d'intersection d'un plan osculateur se correspondant involutivement, ces points se déduisent alternativement l'un de l'autre.

III. — Remarques relatives a des théorèmes de M. Halphen.

8. Dans un Mémoire inséré au Tome III des *Acta mathematica*, M. Halphen déduit de l'étude des équations différentielles

(1) *Leçons de Géométrie*, trad. Benoist, t. II, p. 345.

du 4e ordre, sans second membre, diverses conséquences géométriques. Il donne en particulier des propriétés des courbes *anharmoniques,* c'est-à-dire des courbes pouvant se transformer homographiquement en elles-mêmes; les courbes anharmoniques algébriques peuvent se représenter par les équations

$$\frac{X}{\lambda^\alpha} = \frac{Y}{\lambda^\beta} = \frac{Z}{\lambda^\gamma} = \frac{T}{1},$$

α, β, γ étant des entiers positifs, premiers entre eux dans leur ensemble.

M. Halphen démontre que :

1° Si une courbe appartient par ses tangentes à un complexe linéaire et est anharmonique, elle est tracée sur une surface du second degré;

2° Si une courbe appartient par ses tangentes à un complexe linéaire et est tracée sur une surface du second degré, elle est anharmonique.

La condition pour qu'une courbe anharmonique appartienne par ses tangentes à un complexe linéaire s'exprime, si l'on suppose $\alpha > \beta > \gamma$, par

$$\alpha = \beta + \gamma;$$

on voit alors que la courbe est située sur la quadrique, non développable,

$$YZ - XT = 0.$$

Les courbes que j'ai étudiées sont anharmoniques; la biquadratique n'appartient pas à un complexe linéaire, l'autre quartique appartient à un complexe linéaire.

9. On peut se proposer de chercher dans quels cas une courbe anharmonique algébrique tracée sur une quadrique n'appartient pas à un complexe linéaire.

Il suffit de former l'équation qui donne les λ des points d'intersection d'une courbe anharmonique avec une quadrique, et de chercher dans quel cas cette équation se réduit à une identité. En supposant, pour fixer les idées, $\alpha > \beta > \gamma$, ce qu'on peut toujours

faire, on obtient les cas suivants :

$$\begin{array}{rcl} \alpha = \beta + \gamma & \text{quadrique :} & YZ - XT = 0, \\ \alpha = 2\beta & \text{»} & XT - Y^2 = 0, \\ \alpha + \gamma = 2\beta & \text{»} & XZ - Y^2 = 0, \\ \alpha = 2\gamma & \text{»} & XT - Z^2 = 0, \\ \beta = 2\gamma & \text{»} & YT - Z^2 = 0. \end{array}$$

On voit que, dans les quatre derniers cas, la quadrique est développable et qu'elle ne l'est pas dans le premier; et l'on peut conclure de ce qui précède que :

1° Si la courbe est sur une seule quadrique, *non développable,* elle appartient à un complexe linéaire;

2° Si la courbe est une seule quadrique *développable,* elle n'appartient pas à un complexe linéaire;

Enfin, si la courbe est sur deux quadriques, ce ne peut être qu'une cubique gauche ou une biquadratique.

On sait qu'une cubique gauche appartient à un complexe linéaire; d'ailleurs pour la cubique gauche on aurait

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 2, \qquad \gamma = 1,$$

et l'équation

$$\alpha = \beta + \gamma$$

exprime la condition en question.

Pour une biquadratique on aurait $\alpha = 4$ et l'on ne pourrait prendre que

$$\beta = 3, \quad \gamma = 2 \qquad \text{ou} \qquad \beta = 2, \quad \gamma = 1,$$

ce qui donne les courbes

$$\frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^3} = \frac{Z}{\lambda^2} = \frac{T}{1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{X}{\lambda^4} = \frac{Y}{\lambda^2} = \frac{Z}{\lambda} = \frac{T}{1}.$$

Or, si l'on change λ en $\frac{1}{\lambda}$, ces équations se déduisent les unes des autres en permutant X et T d'une part, Y et Z d'autre part.

On déduit de cette discussion que *la biquadratique de 4e classe est la seule courbe anharmonique algébrique par laquelle on puisse faire passer une quadrique, non développable, sans que les tangentes de la courbe appartiennent à un complexe linéaire.*

LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS;

Par M. R. de Montessus.

Hoéné Wronski [1] a fondé la réduction numérique des équations *algébriques* sur les fonctions *aleph*. Ces fonctions sont un cas particulier de fonctions plus générales, permettant de résoudre, comme celles-ci, la question posée.

Qui plus est, ces fonctions générales donnent la solution des équations numériques *transcendantes*, au lieu que les fonctions *aleph* n'y sauraient prétendre.

Je vais brièvement exposer la méthode de résolution des équations numériques, telle qu'elle résulte de travaux récents [2], et comparer les résultats de cette méthode avec ceux que H. Wronski avait énoncés *quatre-vingt-dix ans* plus tôt.

Je suppose que l'équation à étudier ne possède que des racines simples. *Deux cas sont à distinguer.*

I. *Les modules des deux racines les plus proches du point* $z = 0$ *sont différents l'un de l'autre.*

Soit

$$F(z) = 0$$

l'équation proposée et soit α_1 la racine de moindre module. Si $\Phi(z)$ est une fonction assujettie aux seules conditions : 1° de n'avoir aucun pôle dans le cercle de rayon $|\alpha_1|$; 2° que la fonction

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)}$$

soit développable en série de puissances entières

$$s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots, \tag{1}$$

on sait que *le rapport* $\frac{s_p}{s_{p+1}}$ *tendra, p croissant indéfiniment, vers la racine* α [3].

---

(1) H. Wronski, *Résolution générale des équations de tous les degrés* (*Messianisme*, t. III).

(2) Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique*, p. 90.

(3) Hadamard, *loc. cit.*, p. 38.

Si $F(z)$ est un polynome, on pourra prendre pour $\Phi(z)$ un polynome quelconque. On déterminera alors la série (1) en identifiant les termes de l'identité

$$\Phi(z) = F(z) \times (s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots).$$

On vérifiera *sans peine* que, si

$$F(z) = z^m - A_1 z^{m-1} + A_2 z^{m-2} - \ldots + (-1)^m A_m,$$

les coefficients s_m sont déterminés de la manière suivante :

1° Les premiers $s_0, s_1, \ldots, s_p$ dépendent du polynome $\Phi(z)$, c'est-à-dire, pour l'objet qui nous préoccupe, sont *arbitraires; on peut prendre arbitrairement, quel que soit le nombre fini p, les coefficients* $s_0, s_1, \ldots, s_p$.

2° Les coefficients $s_{p+1}, s_{p+2}, \ldots$ vérifient la loi de récurrence

$$(2) \quad -A_m s_n + A_{m-1} s_{n-1} + \ldots + (-1)^m A_1 s_{n-(m-1)} + (-1)^{m+1} s_{n-m} = 0 \qquad (n < p).$$

Semblablement, le calcul de la racine de plus grand module, *à la supposer seule de ce module,* peut se faire comme il suit :

Faisant sur l'équation la transformation $z = \frac{1}{Z}$, on est ramené au cas précédent.

Si

$$\sigma_0 + \sigma_1 Z + \sigma_2 Z^2 + \ldots$$

est le développement en série de la fonction

$$\frac{\Phi_1(Z)}{F_1(Z)},$$

où $F_1(Z) = 0$ est la transformée de $F(z) = 0$ par la substitution $z = \frac{1}{Z}$,

$$\frac{\sigma_{p+1}}{\sigma_p}$$

tend vers la racine en question.

Ici les fonctions σ vérifient la loi de récurrence

$$(3) \qquad \sigma_n - A_1 \sigma_{n-1} + A_2 \sigma_{n-2} - \ldots + (-1)^m A_m \sigma_{n-m} = 0.$$

J. Bernoulli connaissait ce procédé de calcul des racines de

plus petit et plus grand module *dans le cas où l'équation est algébrique.*

Wronski de même. Ce dernier emploie à cet effet les fonctions *aleph.* Les fonctions *aleph positives* correspondent aux fonctions $\mathfrak{d}$ et sont définies par les conditions

$$\begin{aligned}
&\textit{Aleph de zéro} = \aleph(0) = \aleph(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^0 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)^0 = 1,\\
&\textit{Aleph de un} \quad = \aleph(1) = \aleph(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)^1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m,\\
&\textit{Aleph de deux} = \aleph(2) = \aleph(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)_1^2 = \Sigma\alpha_1^2 + \Sigma\alpha_1\alpha_2,\\
&\textit{Aleph de trois} = \aleph(3) = \aleph(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^3 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)_1^3 = \Sigma\alpha_1^3 + \Sigma\alpha_1^2\alpha_2 + \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3,
\end{aligned}$$

où le symbole $(\quad)_1$ indique que, dans le développement de

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m)^p,$$

on doit remplacer tous les facteurs p, $\frac{p(p-1)}{1.2}$, $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$, ... par l'unité.

Les fonctions $\aleph$ vérifient les relations de récurrence (3) et la limite de $\frac{\aleph(p+1)}{\aleph(p)}$, quand p croît indéfiniment, n'est autre que la racine de plus grand module de l'équation, *si toutes les autres racines ont des modules moindres.*

Le calcul de la racine de moindre module, à supposer que toutes les autres racines soient plus grandes en modules, se fait de même par les fonctions *aleph négatives,* définies comme il suit :

$$\begin{aligned}
&\aleph(-1) = \aleph(-2) = \aleph(-3) = \ldots = \aleph[-(m-1)] = 0,\\
&-A_m\,\aleph[-(n+m)] + A_{m-1}\,\aleph[-(n+m-1)]\\
&\qquad - A_{m-2}\,\aleph[-(n+m-2)] + \ldots\\
&\qquad + (-1)^{m-2}\,\aleph[-(n+1)] + (-1)^{m-1}\,\aleph(-n) = 0,
\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la relation de récurrence (2).

II. *Les modules des deux racines les plus proches de l'origine sont identiques.*

Si les modules des racines de l'équation, algébrique ou non, vérifient les inégalités

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| < |\alpha_3| \leqq |\alpha_4| \leqq \ldots,$$

on peut former l'équation du second degré admettant les racines α_1, α_2, sous condition qu'il existe une fonction $\Phi(z)$ n'ayant aucun

pôle dans le cercle de rayon $|\alpha_2|$ et telle que la fonction

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)}$$

soit développable en série suivant les puissances entières de la variable z. En effet, on peut écrire

$$\frac{\Phi(z)}{F(z)} = \frac{A}{\alpha_1 - z} + \frac{B}{\alpha_2 - z} + \frac{\Phi_1(z)}{F_1(z)} \quad \text{où} \quad F_1(z) = \frac{F(z)}{(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)},$$

$$\frac{A}{\alpha_1 - z} = \frac{A}{\alpha_1} + \frac{Az}{\alpha_1^2} + \frac{Az^2}{\alpha_1^3} + \ldots + \frac{Az^{n-1}}{\alpha_1^n} + \ldots,$$

$$\frac{B}{\alpha_2 - z} = \frac{B}{\alpha_2} + \frac{Bz}{\alpha_2^2} + \frac{Bz^2}{\alpha_3^2} + \ldots + \frac{Bz^{n-1}}{\alpha_2^n} + \ldots,$$

$$(4) \qquad \frac{\Phi(z)}{F(z)} = s'_0 + s'_1 z + s'_2 z^2 + \ldots + s'_n z^n + \ldots,$$

et si

$$\frac{\Phi_1(z)}{F_1(z)} = s_0 + s_1 z + s_2 z^2 + \ldots + s_n z^n + \ldots :$$

1°

$$s_n = \frac{A}{\alpha_1^{n+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} + s'_n;$$

2° Les quantités $\alpha_1^n s'_n$, $\alpha_2^n s'_n$ tendent vers zéro quand n croît indéfiniment.

Car la série (4) converge par hypothèse dans un cercle de rayon $> |\alpha_2|$, puisque les pôles de $\Phi(z)$ [ou $\Phi_1(z)$] et les zéros de $F_1(z)$ sont extérieurs au cercle de rayon $|\alpha_2|$. Donc les séries $\Sigma\alpha_1^n s'_n$, $\Sigma\alpha_2^n s'_n$ convergent, ce qui justifie la proposition. Cela posé, étudions le déterminant

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p-1} \\ s_n & s_{n+p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{A}{\alpha_1^n} + \frac{B}{\alpha_2^n} + s'_{n-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p}} + s'_{n+p-1} \\ \frac{A}{\alpha_1^{n+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+1}} + s'_n & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} + \frac{B}{s_2^{n+p+1}} + s'_{n+p} \end{vmatrix}.$$

Multipliant la deuxième colonne par α_1^p et retranchant de la première, il vient

$$D_{n,p} = \begin{vmatrix} \frac{B}{\alpha_2^n}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_{n-1} - \alpha_1^p s'_{n+p-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p}} + s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2^{n+1}}\left(1 - \frac{\alpha_2^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_n - \alpha_1^p s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}} + \frac{B}{\alpha_2^{n+p+1}} + s'_{n+p} \end{vmatrix}.$$

Multipliant la première colonne par $\frac{1}{\alpha_2^p}$ et retranchant de la deuxième, multipliée au préalable par $1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}$,

$$D_{n,p} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} \frac{B}{\alpha_2^n}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + s'_{n-1} - \alpha_1^p s'_{n+p-1} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p}}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{1}{\alpha_2^p} s'_{n-1} + s'_{n+p-1} \\ \frac{B}{\alpha_2^{n+1}}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^n}\right) + s'_n - \alpha_1^p s'_{n+p} & \frac{A}{\alpha_1^{n+p+1}}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{1}{\alpha_2^p} s'_n + s'_{n+p} \end{vmatrix};$$

d'où

$$\alpha_2^n \alpha_1^{n+p} D_{n,p}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} B\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_1^p}\right) + \alpha_2 \underline{\alpha_2^{n-1} s'_{n-1}} - \alpha_1 \frac{\alpha_1^{p-1}}{\alpha_2^{p-1}} \underline{\alpha_2^{n-p-1} s'_{n+p-1}} & A\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \alpha_1 \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \underline{\alpha_1^{n-1} s'_{n-1}} + \alpha_1 \underline{\alpha_1^{n+p-1} s} \\ \frac{B}{\alpha_2}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) + \underline{\alpha_2^n s'_n} - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \underline{\alpha_2^{n+p} s'_{n+p}} & \frac{A}{\alpha_1}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \underline{\alpha_1^n s'_n} + \underline{\alpha_1^{n+p} s'_{n+p}} \end{vmatrix}$$

Les expressions *soulignées* tendent vers zéro quand n croît indéfiniment, p restant fini et bien déterminé.

Donc

$$\alpha_2^n \alpha_1^{n+p} D_{n,p} = \frac{AB}{1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}} \begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} & 1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p} \\ \frac{1}{\alpha_2}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) & \frac{1}{\alpha_1}\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right) \end{vmatrix} + R_{n,p} = AB\left(1 - \frac{\alpha_1^p}{\alpha_2^p}\right)\left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) + R,$$

où $R_{n,p}$ *tend vers zéro,* quand n croît indéfiniment, p restant fini, et

$$\alpha_1^{n+p+1} \alpha_3^{n+p+1} D_{n,p} = AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n,p}.$$

On en conclut

$$\frac{\alpha_1^{n+p+1} \alpha_2^{n+p+1} D_{n,p}}{\alpha_1^{n+p+2} \alpha_2^{n+p+2} D_{n+1,p}} = \frac{AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n,p}}{AB(\alpha_2^p - \alpha_1^p)(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+1} R_{n+1,p}};$$

d'où

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p-1} \\ s_n & s_{n+p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+p} \\ s_{n+1} & s_{n+p+1} \end{vmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2.$$

En particulier,

$$\lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n \\ s_n & s_{n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1n & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix}} = \alpha_1 \alpha_2$$

On en conclut encore

$$\frac{\alpha_2^{n+p+2}\alpha_2^{n+p+2} D_{n,p+1}}{\alpha_1^{n+p+2}\alpha_2^{n+p+2} D_{n+1,p}} = \frac{AB(\alpha_2^{p+1} - \alpha_1^{p+1})(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p+2} R_{n,p+1}}{AB(\alpha_2^{p} - \alpha_1^{p})(\alpha_2 - \alpha_1) + \alpha_1 \alpha_2^{p} R_{n+1,p}};$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+p} \\ s_n & s_{n+p+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+p} \\ s_{n+1} & s_{n+p+1} \end{vmatrix}} = \frac{\alpha_2^{p+1} - \alpha_1^{p+1}}{\alpha_2^{p} - \alpha_1^{p}}.$$

En particulier,

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_{n-1} & s_{n+1} \\ s_n & s_{n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_n & s_{n+1} \\ s_{n+1} & s_{n+2} \end{vmatrix}} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Ainsi, quand n croît indéfiniment, *les racines de l'équation*

$$(7) \qquad z^2 - \frac{s_n s_{n+1} - s_{n-1} s_{n+2}}{s_{n+1}^2 - s_n s_{n+2}} z + \frac{s_n^2 - s_{n-1} s_{n+1}}{s_{n+1}^2 - s_n s_{n+2}} = 0$$

tendent vers α_1, α_2.

On peut de même construire l'équation ayant pour racines les deux racines de plus grand module α_1, α_2 sous condition que leurs modules soient plus grands que les modules de toutes les autres racines.

Wronski, au moyen des fonctions *aleph* composées, qui sont aux fonctions *aleph* simples ce que les coefficients de l'équation en α_1, α_2 sont à s_{n-1}, s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, a formé semblablement l'équation (7) et l'équation donnant les deux racines de plus grands modules.

III *Les modules des* $p (p > 2)$ *racines les plus proches du point* $z = 0$ *sont identiques.*

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \ldots \leqq |\alpha_p| < |\alpha_{p+1}| \leqq |\alpha_{p+2}| \leqq \ldots.$$

Dans ce cas, comme dans le cas de $p = 2$, on peut former [1], *et Wronski l'avait fait,* l'équation de degré p admettant les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$; Wronski avait aussi formé l'équation admettant les racines $\alpha_{q+1}, \alpha_{q+2}, \ldots, \alpha_m$ si $|\alpha|_q > |\alpha_{q+1}| \leqq |\alpha_{q+2}| \leqq \ldots \leqq |\alpha_m|$.

Il est plus simple d'observer qu'une substitution $z = a + Z$ où a est convenablement choisi, et d'ailleurs facile à choisir, fait que une ou deux racines seulement se trouvent sur le cercle de convergence de $\frac{\Phi(Z)}{F(Z)}$.

La méthode indiquée donnera donc, dans tous les cas, soit *une*, soit *deux* racines : je parle de valeurs approchées. D'où formation possible d'une équation approchée, admettant comme racines des valeurs approchées des autres racines de la proposée. On pourra calculer ainsi des valeurs *approchées* des racines de l'équation proposée. Cela permettra de construire un cercle C de centre $x = h$, $y = k$ à l'intérieur duquel sera la *seule* racine α_λ que l'on voudra calculer avec telle approximation fixée à l'avance. Faisant, en effet, sur l'équation, la substitution

$$x + iy = z = X + h + i(Y + k),$$

l'équation transformée en Z aura la *seule* racine $\alpha_\lambda + h + ik$ dans le cercle C ayant son centre au point $Z = 0$. Dès lors, la méthode exposée au paragraphe I permettra de calculer $\alpha_\lambda + h + ik$, d'où α_λ, avec telle approximation que l'on voudra.

IV. Dans la méthode exposée, le choix des indéterminées

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_{m-1}$$

influe sur la convergence plus ou moins rapide des rapports déterminant les racines. *Nous n'avons actuellement aucun moyen d'étudier* A PRIORI *la rapidité de la convergence. Si nous remarquons que dans les équations traitées par Wronski* (et ces équations ne peuvent avoir été choisies à cet effet) *la convergence s'affirme comme* TRÈS RAPIDE, *nous devons conclure que le* CHOIX DES FONCTIONS ALEPH EST, selon toute vraisemblance, PARFAITEMENT APPROPRIÉ A LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

---

[1] HADAMARD, *loc. cit.*, p. 41.

Conclusion. — H. Wronski avait indiqué, voici près d'un siècle, la méthode de réduction des équations numériques algébriques que de récents travaux ont retrouvée, seule méthode qui atteigne pleinement le but proposé.

A vrai dire, Wronski n'avait pas fait la discussion de sa méthode : mais les notions restreintes que les géomètres ses contemporains avaient de l'Analyse ne lui permettaient pas de faire cette discussion.

Du moins, Wronski a-t-il eu le mérite d'indiquer une *base*, les fonctions *aleph*, permettant de construire des expressions rapidement convergentes, ce que nul après lui n'a tenté.

Cependant, l'exposé de Wronski est à ce point... *obscur* et plus, qu'il ne pouvait guère être compris tel qu'il est. *Il était nécessaire*, pourrait-on dire, *que les résultats de l'énigmatique Polonais fussent retrouvés par une voie nouvelle*.

SUR L'INTERPOLATION;

Par M. S. Bernstein.

M. Borel a soulevé récemment au Congrès de Heidelberg la question de la convergence des séries de polynomes qu'on obtient par l'interpolation. Cette question a déjà été traitée d'une façon détaillée par M. Runge [1]. Le résultat de cette étude peut se résumer ainsi : les polynomes approchés d'une fonction continue donnés par la formule de Newton ne convergent, en général, vers aucune limite. Cette étude met une fois de plus en évidence le fait qu'en général la possibilité du développement d'une fonction en une série de polynomes sur un segment dépend essentiellement de la régularité de la fonction (supposée analytique) dans une région déterminée entourant ce segment.

Le praticien (qui ne trouverait pas le calcul de la formule de Newton trop embarrassant) pourrait évidemment objecter que l'expérience immédiate ne lui défend pas d'identifier sa fonction à

---

[1] *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 1901.

un polynome et de lui attribuer ainsi toute la régularité désirable dans le domaine complexe.

Mais justement à la circonstance théorique signalée plus haut correspond ce fait pratiquement important qu'une *variation inappréciable des données expérimentales conduit à une variation considérable des valeurs des polynomes approchés en certains points intermédiaires*. En réalité, les praticiens préfèrent se servir comme courbes représentatives approchées de leur fonction des lignes polygonales qui passent par des points déterminés expérimentalement. Il est clair que ce dernier mode d'interpolation permet de représenter la fonction avec toute la précision que comportent les mesures directes. Il m'a paru intéressant de ramener le calcul de ces lignes brisées à un algorithme analytique. La chose est aisée; nous verrons qu'il suffit d'introduire la fonction $|x|$ qui signifie comme toujours *valeur absolue de x*.

Soit $y = F(x)$ une fonction uniforme et continue lorsque x varie de 0 à 1. Considérons la ligne brisée ayant pour sommets les points

$$P_0[0, F(0)]; \quad P_1\left[\frac{1}{n}, F\left(\frac{1}{n}\right)\right]; \quad P_2\left[\frac{2}{n}, F\left(\frac{2}{n}\right)\right]; \quad \ldots; \quad P_n[1, F(1)].$$

Si l'équation de cette ligne brisée est

$$y_n = F_n(x),$$

il est évident que la série

$$y = y_{\alpha_1} + (y_{\alpha_2} - y_{\alpha_1}) + \ldots + (y_{\alpha_k} - y_{\alpha_{k-1}}) + \ldots$$

converge uniformément sur le segment 01, pourvu que α_k croisse indéfiniment avec k. Cherchons donc l'expression de $F_n(x)$. Il est clair que

$$(1) \qquad F_n(x) = A_0|x| + A_1\left|x - \frac{1}{n}\right| + \ldots + A_n|x-1|,$$

avec

$$(2) \quad A_x = \frac{n}{2}\left\{F\left(\frac{x+1}{n}\right) + F\left(\frac{k-1}{n}\right) - 2F\left(\frac{k}{n}\right)\right\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$(3) \qquad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{2}\left\{F(1) + \quad nF\left(\frac{1}{n}\right) \quad - (n-1)F(0)\right\}, \\ A_n = \frac{1}{2}\left\{F(0) + nF\left(\frac{n-1}{n}\right) - (n-1)F(1)\right\}. \end{cases}$$

Ces formules sont une conséquence immédiate de la propriété de la fonction $|x|$ que ses différences secondes sont nulles partout sauf pour $x = 0$. On voit que l'usage et la démonstration de ces formules n'exigent que des connaissances tout à fait élémentaires. Si l'on veut sortir du domaine des mathématiques élémentaires il est aisé de rattacher nos formules au calcul intégral. Supposons que $F(x)$ admette des dérivées des deux premiers ordres. On a évidemment pour $n = \infty$

$$(2\ bis) \qquad A_x = \frac{1}{2} F''\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n},$$

$$(3\ bis) \qquad \begin{cases} A_0 = \frac{1}{2}\left\{ F(1) + F(0) + F'(0) \right\}, \\ A_n = \frac{1}{2}\left\{ F(1) + F(0) - F'(1) \right\}. \end{cases}$$

De sorte que

$$(1\ bis) \qquad \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 F''(z)\,|x - z|\,dz + \frac{1}{2}\left\{ F(1) + F(0) + F'(0) \right\} |x| \\ \qquad + \frac{1}{2}\left\{ F(1) + F(0) - F'(1) \right\} |1 - x| \\ \qquad = \frac{1}{2}\int_0^1 F''(z)\,|x - z|\,dz \\ \qquad + \frac{1}{2}\left\{ F(1) + F(0) - F'(1) \right\} + \frac{x}{2}\left\{ F'(0) + F'(1) \right\}. \end{cases}$$

L'égalité (1 *bis*) est facile à vérifier directement. L'interpolation des fonctions continues de plusieurs variables se fait d'une façon toute semblable en introduisant à la place de la fonction élémentaire $|x|$ les fonctions $|x, y|$ ou $|x, y, z|$ etc. Le calcul des coefficients ainsi que les diverses opérations ne présentent pas de difficulté. Les lignes au moyen desquelles nous avons cherché à approcher notre fonction continue admettent des tangentes discontinues; c'étaient celles qui se présentent géométriquement le plus naturellement. Mais, si l'on voulait interpoler au moyen de fonctions discontinues, on obtiendrait des formules encore plus simples.

Supposons, en effet, qu'on nous donne les valeurs $F(0)$, $F\left(\frac{1}{n}\right), \ldots, F(1)$ et construisons la fonction discontinue $F_n(x)$ qui

de o à $\frac{1}{n}$ $\left(\frac{1}{n}\text{ exclu}\right)$ égale F(o), de $\frac{1}{n}$ à $\frac{2}{n}$ $\left(\frac{2}{n}\text{ exclu}\right)$ égale $F\left(\frac{1}{n}\right)$ et ainsi de suite, enfin $F_n(1) = F(1)$. Si nous introduisons la fonction $\lambda(x)$ telle que $\lambda(x) = 0$ pour $-\infty < x < 0$ et $\lambda(x) = 1$ pour $0 \leqq x < \infty$, on a évidemment :

$$F_n(x) = A_0 h(x) + A_1 \lambda\left(x - \frac{1}{n}\right) + \ldots + A_n \lambda(x - 1),$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= F(0), \\ A_1 &= F\left(\frac{1}{n}\right) - F(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_n &= F(1) - F\left(\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Tous les calculs, avec ces séries, se font avec le plus haut degré de simplicité. La généralisation pour le cas de plusieurs variables est immédiate. Il est aisé encore de reconnaître que ce procédé d'interpolation se rattache à la formule

$$F(x) = \int_0^1 F'(z)\lambda(x - z)\,dz + F(0).$$

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES;

Par M. H. Andoyer.

La méthode qui se présente naturellement pour obtenir la somme d'une série numérique consiste à calculer directement la somme d'un certain nombre de termes à partir du premier, et à fixer, quand on le peut, une limite de l'erreur ainsi commise. Malheureusement, il arrive trop souvent que cette méthode n'a aucune valeur pratique : c'est ainsi qu'en calculant exactement la somme des vingt mille premiers termes de la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots,$$

et en supposant que les calculs eux-mêmes ne donnent lieu à

aucune erreur, on obtient un résultat dont l'erreur atteint encore 0,000025 environ.

Cependant les ouvrages classiques en usage de nos jours sont muets sur les méthodes à employer pour obtenir des résultats plus satisfaisants. Il ne semblera donc peut-être pas inutile d'indiquer comment on peut procéder pour obtenir rapidement, avec une grande précision, facile d'ailleurs à évaluer, la somme de certaines séries formant une classe très étendue. Le principe de la méthode que nous allons expliquer est indiqué et longuement développé par J. Stirling (*Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum,* Londres, 1730); nous n'avons fait que le présenter d'une façon générale et approprier son exposition aux habitudes actuelles.

Envisageons la série convergente de terme général u_n, l'indice n prenant successivement les valeurs n_0, n_0+1, n_0+2, ..., telle que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ soit développable suivant les puissances décroissantes de n; c'est-à-dire que, q étant un entier positif quelconque, on peut écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \ldots + \frac{\alpha_q}{n^q} + \frac{A_{q+1}}{n^{q+1}},$$

α_0, α_1, α_2, ..., α_q étant des constantes, et A_{q+1} une fonction de n ayant une limite quand n devient infini.

On a d'ailleurs $|\alpha_0| \leqq 1$; de plus, si $\alpha_0 = 1$, il faut, comme on sait d'après la règle de Gauss, $\alpha_1 < -1$; et si $\alpha_0 = -1$, le premier des coefficients α_1, α_2, ... qui n'est pas nul est positif.

Si

$$s_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n,$$
$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$$

la somme de la série est

$$S = s_n + r_n.$$

Soit z_n une fonction de n ayant comme limite zéro pour n infini, et faisons

$$u'_n = u_n + z_{n+1} - z_n;$$

la série dont le terme général est u'_n est convergente, et si l'on

fait

$$r'_n = u'_{n+1} + u'_{n+2} + \ldots,$$

on a évidemment

$$r_n = z_{n+1} + r'_n;$$

si de plus on pose

$$z_n = u_n t_n,$$

on a

$$u'_n = u_n \left(1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}\right),$$

avec

$$r_n = u_{n+1} t_{n+1} + r'_n.$$

Le calcul de r_n est ainsi ramené à celui de r'_n; en choisissant t_n de façon convenable, on pourra, comme nous allons le voir, obtenir une valeur approchée de r_n comprise entre des limites faciles à déterminer, et, en ajoutant à r_n la somme s_n calculée directement, on aura finalement S avec une approximation qu'on peut fixer.

Pour le choix de t_n il est nécessaire de distinguer deux cas, suivant que α_0 est inférieur ou égal à 1.

Supposons d'abord $\alpha_0 < 1$, et faisons

$$t_{n+1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}},$$

les β_i étant des constantes, p un entier positif quelconque. On aura par suite

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n-1} + \frac{\beta_2}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{\beta_{p+1}}{(n-1)^{p+1}},$$

et en développant chaque terme suivant les puissances décroissantes de n, on a

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \frac{\beta_3 + 2\beta_2 + \beta_1}{n^3} + \ldots$$
$$+ \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}\beta_{p-2} + \ldots}{n^p} + \frac{B_{p+1}}{n^{p+1}},$$

la loi des numérateurs étant évidente, et B_{p+1} étant une fonction de n ayant une limite pour n infini.

Si maintenant nous nous servons de la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en y

faisant $q = p$, on voit que l'expression

$$T = 1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}$$

se développe elle-même sous la forme

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \ldots + \frac{\gamma_p}{n^p} + \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ étant des constantes, et C_{p+1} une fonction de n ayant une limite pour n infini. On voit alors que, à cause de $1 - \alpha_0 \neq 0$, on peut choisir $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ de façon à annuler $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$, et de plus β_{p+1} de façon que la limite de C_{p+1} ait une valeur donnée à l'avance quelconque.

Si l'on a $\alpha_0 = 1$, le calcul précédent est impossible; mais on arrive au même résultat en faisant

$$t_{n+1} = \beta n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots + \frac{\beta_p}{n^p},$$

d'où

$$t_n = \beta n + (\beta_0 - \beta) + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \ldots + \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \ldots}{n^p} + \frac{B_{p+1}}{n^{p+1}},$$

comme plus haut; en se servant de la valeur de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, où l'on fait $q = p + 1$, on peut encore déterminer $\beta, \beta_0, \ldots, \beta_{p-1}; \beta_p$ de façon que T ait la forme $\frac{C_{p+1}}{n^{p+1}}$, C_{p+1} ayant une limite arbitraire.

Ainsi, dans tous les cas

$$\frac{u'_n}{u_n} = \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

C_{p+1} ayant une limite quelconque; or, on peut prendre n assez grand pour que la somme r'_n ait le signe de son premier terme u'_{n+1}; en supposant donc la limite de C_{p+1} successivement positive et négative, on aura deux valeurs de r_n, fournies par l'expression $u_{n+1} t_{n+1}$, approchées en sens contraire, et d'autant moins différentes que p sera plus grand. Il en sera de même pour la somme S de la série proposée.

Les exemples suivants feront bien comprendre l'esprit de la méthode et son application.

1° Soit

$$u_n = \frac{(-1)^{n-n_0}C}{n-1},$$

C étant une constante.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \frac{1}{n},$$

et l'on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^3} + \frac{\beta_5}{n^5},$$

on a

$$C_5 = -\beta_5\left[1 + \left(\frac{n}{n-1}\right)^5 - \frac{1}{n}\right] + \frac{n(2n-1)^2}{8(n-1)^3}.$$

Pour $\beta_5 = 0$, la limite de C_5 est positive; pour $\beta_5 = \frac{1}{2}$, elle est négative, en donnant donc successivement ces deux valeurs à β_5 dans t_{n+1}, la valeur de r_n sera comprise entre les deux valeurs obtenues pour $u_{n+1}t_{n+1}$. Faisons par exemple $C = 1$, $n_0 = 2$, $n = 10$, de sorte que la série à sommer est

$$\log \text{nép}\, 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdots.$$

On a directement

$$s_n = 0{,}745634920\ldots,$$

et r_n est compris entre $-0{,}0524875$ et $-0{,}0524880$; donc S est compris entre

$$0{,}69314742\ldots \quad \text{et} \quad 0{,}69314692\ldots.$$

De même en faisant

$$C = 2, \qquad n_0 = \frac{3}{2}, \qquad n = \frac{19}{2},$$

de sorte que la série à sommer est

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right),$$

on a directement

$$s_n = 3{,}25236593\ldots,$$

et r_n est compris entre $-0{,}11077263\ldots$ et $-0{,}11077399$; donc

S est compris entre

$$3,14159330\ldots \quad \text{et} \quad 3,14159194\ldots.$$

2° Soit

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^2},$$

de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2};$$

on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{30n^3} + \frac{\beta_5}{n^5},$$

on a

$$C_6 = \frac{5n^3 - 5n^2}{30(n-1)^3} - \beta_5\left[\frac{n^6}{(n-1)^5} - n + 2 - \frac{1}{n}\right].$$

Pour $\beta_5 = 0$, la limite de C_6 est positive; pour $\beta_5 = \frac{1}{10}$, elle est négative.

Faisant $n_0 = 2$, $n = 10$, de sorte que la série à sommer est

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots;$$

on a directement

$$s_n = 1,539767731\ldots,$$

et r_n est compris entre

$$0,105166333\ldots \quad \text{et} \quad 0,105166343\ldots;$$

donc S est compris entre

$$1,644934064\ldots \quad \text{et} \quad 1,644934074\ldots.$$

Pratiquement, on se dispense de calculer la quantité C_{p+1}, et l'allure du développement de t_{n+1} permet de se rendre compte d'une façon suffisante de l'approximation obtenue en arrêtant ce développement à un certain rang.

GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE;

Par M. Émile Cotton.

La première Partie de ce travail concerne les mouvements à plusieurs paramètres de l'espace ordinaire. Je montre comment on passe des formules habituelles définissant les éléments géométriques attachés aux trajectoires aux formules analogues relatives au trièdre mobile : on substitue aux dérivées des coordonnées ordinaires certaines fonctions des paramètres du mouvement; ces fonctions se déterminent de proche en proche par une méthode simple.

Dans la suite, j'attribue au mot *mouvement* un sens plus étendu encore. J'appelle, par exemple, *mouvement d'ensemble* à p paramètres $u_1, \ldots, u_p$ d'un espace $E(x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à un espace fixe $E'(x'_1, \ldots, x'_n)$ une correspondance entre les $2n+p$ variables x, x' et u, obtenue en remplaçant dans les équations

$$x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

d'un groupe fini continu et transitif G, les paramètres $a_1, \ldots, a_r$ par des fonctions des variables $u_1, \ldots, u_p$.

Au lieu de supposer le mouvement d'ensemble explicitement donné, on peut le considérer comme déterminé par l'un de ces systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales dont j'ai fait antérieurement l'étude ([1]). On parvient alors (IIe Partie) à un principe de passage analogue à celui du début, tant par sa forme que par ses conséquences.

Dans la IIIe Partie, je montre que la notion d'élément réduit ([2]) relatif à une multiplicité de l'espace E' et au groupe G, permet d'attacher à toute multiplicité à p dimensions, un mouvement d'ensemble à p paramètres dont l'étude peut être substituée à celle de la multiplicité.

Cette notion de mouvement auxiliaire permet de présenter sous

---

([1]) *Comptes rendus*, 6 janvier 1902. *Annales de l'Université de Grenoble*, t. XVI, p. 367. Les renvois à ce dernier travail sont indiqués, dans la suite, par les mots *Systèmes* (L).

([2]) Tresse, *Acta mathematica*, t. XVIII.

une forme intuitive un résultat donné par M. Vessiot dans l'un de ses beaux Mémoires [1] sur l'application de la théorie des groupes aux systèmes différentiels; il s'agit de la décomposition d'un système différentiel admettant un groupe en un système résolvant et un système automorphe.

Il n'est question ici que de groupes finis; mais ce cas particulier est important en Géométrie. J'espère que le présent travail facilitera l'utilisation des groupes (autres que celui des mouvements) qui se présentent naturellement dans des questions classiques; tel est, par exemple, le groupe de la représentation conforme.

J'indique rapidement, en terminant, de quelle façon on pourrait en tirer parti dans la recherche des systèmes triples orthogonaux.

I. — Sur la théorie du trièdre mobile.

1. Nous dirons qu'un point M est animé par rapport à un trièdre $T'(O'x'y'z')$ d'un *mouvement à deux paramètres* [2] u, v, lorsque les coordonnées x', y', z' de M sont fonctions des deux variables u, v.

Nous appellerons *vitesse* de M relativement à u, le vecteur $\overline{MM'_u}$ dont les projections sont $\frac{\partial x'}{\partial u}$, $\frac{\partial y'}{\partial u}$, $\frac{\partial z'}{\partial u}$; et définirons de même la vitesse $\overline{MM'_v}$ relative à v.

Par le point fixe O', menons le vecteur $\overline{O'V_u}$ équipollent à $\overline{MM'_u}$; et par M menons des vecteurs $\overline{MM''_{u^2}}$, $\overline{MM''_{uv}}$ équipollents respectivement aux vitesses de V_u relativement à u et v. Nous dirons que ces vecteurs $\overline{MM''_{u^2}}$ ou J_{u^2} et $\overline{MM''_{uv}}$ ou J_{uv} sont les accélérations relatives à u^2 et à uv. On définit d'une façon analogue les accélérations J_{vu} et J_{v^2} relatives à vu et à v^2; d'ailleurs J_{uv} et J_{vu} sont identiques.

---

(1) Vessiot, *Annales de l'École Normale*, 1903 et 1904; *Acta mathematica*, t. XXVIII. Ce dernier Mémoire est le plus important pour le sujet qui nous occupe.

(2) Nous distinguons le *mouvement* d'un point du *déplacement* de ce point. Dans le déplacement on ne s'occupe que de l'ensemble des positions occupées par le point variable; dans le mouvement on tient compte de la relation entre ces positions et les valeurs de certains paramètres. Si l'on remplace u, v par des fonctions de u', v', les nouvelles expressions de $x'y'z'$ définissent le même déplacement que les anciennes, et un nouveau mouvement.

Des accélérations du premier ordre, que l'on vient de définir, on passe à celles du second ordre J_{u^2}, J_{u^2v}, J_{uv^2}, J_{v^2}, puis à celles du troisième, du quatrième, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre par le même procédé qui permet de définir les accélérations du premier ordre en partant des vitesses. Les accélérations d'ordre n sont des vecteurs, ayant M pour origine, dont les projections sur $O'x'$ sont les dérivées d'ordre $n+1$ de x', et de même pour $O'y'$ et $O'z'$.

2. Imaginons maintenant que le mouvement absolu (¹) de M soit déterminé par l'expression, en fonction des variables u, v, des coordonnées x, y, z de M relativement à un trièdre mobile $Oxyz$ ou T, le mouvement de T par rapport à T′ étant donné par un système (L) d'équations linéaires aux différentielles totales, complètement intégrable.

Nous allons calculer les projections des vitesses et des accélérations sur les axes du nouveau trièdre.

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} dx + \xi\, du + \xi_1\, dv + (q\, du + q_1\, dv)\, z - (r\, du + r_1\, dv)\, y = 0, \\ dy + \eta\, du + \eta_1\, dv + (r\, du + r_1\, dv)\, x - (p\, du + p_1\, dv)\, z = 0, \\ dz + \zeta\, du + \zeta_1\, dv + (p\, du + p_1\, dv)\, y - (q\, du + q_1\, dv)\, x = 0, \end{cases}$$

le système (L) considéré (²).

D'après la façon même dont on obtient (1), on peut écrire les projections des vitesses

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{MM'_u} \quad x_{10} = \dfrac{\partial x}{\partial u} + \xi + qz - ry, \quad y_{10} = \dfrac{\partial y}{\partial u} + \eta + rx - pz, \quad z_{10} = \dfrac{\partial z}{\partial u} + \zeta + py - \\ \overline{MM'_v} \quad x_{01} = \dfrac{\partial x}{\partial u} + \xi_1 + q_1 z - r_1 y, \quad y_{01} = \dfrac{\partial y}{\partial v} + \eta_1 + r_1 x - p_1 z, \quad z_{01} = \dfrac{\partial z}{\partial v} + \zeta_1 + p_1 y - \end{cases}$$

Nous désignerons, d'une façon générale, par $x_{\alpha\beta}$, $y_{\alpha\beta}$, $z_{\alpha\beta}$ les projections sur les axes de T de l'accélération d'ordre $\alpha + \beta - 1$ relative à u^α et v^β. On obtient ces projections en reprenant le rai-

---

(¹) Les mots *mouvement absolu*, *mouvement relatif*, *mouvement d'entraînement* seront employés avec un sens analogue à celui qu'ils ont en Cinématique.

(²) Tout système d'intégrales de (1) détermine les coordonnées (relatives à T) d'un point fixé à T′. *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, Chap. VII, et Kœnigs, *Cinématique*. Chap. X.

sonnement classique (¹) qui conduit, en Cinématique, aux formules de Bour et à leur généralisation.

On a ainsi les formules de récurrence

$$(3)\qquad \begin{cases} x_{\alpha+1,\beta} = \dfrac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial u} + q z_{\alpha\beta} - r y_{\alpha\beta}, \\ y_{\alpha+1,\beta} = \dfrac{\partial y_{\alpha\beta}}{\partial u} + r x_{\alpha\beta} - p z_{\alpha\beta}, \\ z_{\alpha+1,\beta} = \dfrac{\partial z_{\alpha\beta}}{\partial u} + p y_{\alpha\beta} - q x_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} x_{\alpha,\beta+1} = \dfrac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial v} + q_1 z_{\alpha\beta} - r_1 y_{\alpha\beta}, \\ y_{\alpha,\beta+1} = \dfrac{\partial y_{\alpha\beta}}{\partial v} + r_1 x_{\alpha\beta} - p_1 z_{\alpha\beta}, \\ z_{\alpha,\beta+1} = \dfrac{\partial z_{\alpha\beta}}{\partial v} + p_1 y_{\alpha\beta} - q_1 x_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

applicables aussi aux accélérations du premier ordre (²). Ces formules ne dépendent que des fonctions x, y, z et des $p, p_1, \ldots, \zeta, \zeta_1$, celles-ci satisfaisant aux conditions d'intégrabilité connues.

3. L'emploi des formules précédentes repose sur une remarque bien simple :

Choisissons pour le trièdre fixe $T'(O'x'y'z')$, *resté jusqu'ici arbitraire, la position occupée par le trièdre mobile* T *pour les valeurs numériques* u^0, v^0 *de* u *et* v. *Les valeurs pour* u^0, v^0 *des coordonnées* x', y', z' *de leurs dérivées d'ordre* 1, 2, ..., n *sont égales aux expressions obtenues en remplaçant* u *par* u^0, v *par* v^0 *dans les fonctions correspondantes* $x, y, z, x_{10}, \ldots z_{0n}$.

La remarque antérieure nous donne immédiatement la représentation, par des séries entières, du mouvement absolu de M au voisinage des valeurs u^0 et v^0 de u et v. En développant en série de Taylor les coordonnées x, y, z de M, dont la signification vient

(¹) Kœnigs, *Cinématique*, p. 130 et 449.

(²) Les diverses expressions que l'on peut obtenir pour les projections d'une même accélération sont identiques en vertu des conditions d'intégrabilité.

d'être précisée, on a [1]

$$(5)\quad \begin{cases} x' = x^0 + x^0_{10}(u-u_0) + x^0_{01}(v-v_0) + \frac{1}{2}x^0_{20}(u-u_0)^2 \\ \qquad + \frac{1}{2}x^0_{11}(u-u_0)(v-v_0) + \frac{1}{2}x^0_{02}(v-v_0)^2 + \ldots, \\ \qquad y' = y^0 + \ldots, \qquad z' = z^0 + \ldots. \end{cases}$$

Nous désignons par f^0 la valeur d'une fonction f de u et v pour les valeurs numériques u^0, v^0 de ces variables.

4. *Considérons un système* S′ *de relations de la forme* [2]

$$\mathcal{F}\left(x', y', z', \frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial y'}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^n z'}{\partial v^n}\right) = 0$$

définissant, relativement au trièdre fixe T′, *des éléments géométriques remarquables attachés à la surface trajectoire absolue de* M. Ces éléments sont soit des grandeurs (courbure moyenne, courbure totale, ...), soit des surfaces ou lignes remarquables (plan tangent, tangentes asymptotiques, ...).

Le système S′ est donné par la Géométrie différentielle ordinaire, *le système* S *donnant les mêmes éléments rapportés au trièdre mobile s'en déduit en remplaçant* x', y', z' *par* x, y, z, *et les dérivées* $\frac{\partial^{\alpha+\beta} x'}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$, $\frac{\partial^{\alpha+\beta} y'}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$, $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z'}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$ *par* $x_{\alpha\beta}$, $y_{\alpha\beta}$, $z_{\alpha\beta}$.

Par exemple, pour l'origine O du trièdre mobile, on a

$$(6)\quad \begin{cases} x = 0, \qquad x_{10} = \xi, \qquad x_{01} = \xi_1, \qquad x_{20} = \dfrac{\partial \xi}{\partial u} + q\zeta - r\eta, \\ x_{11} = \dfrac{\partial \xi}{\partial v} + q_1\zeta - r_1\eta = \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} + q\zeta_1 - r\eta_1, \qquad x_{02} = \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} + q_1\zeta_1 - r_1\eta_1, \end{cases}$$

et des formules analogues pour y et z.

5. Des formules habituelles relatives aux coordonnées curvilignes on déduit : l'équation (relative à T) du plan tangent à la trajectoire d'entraînement de O

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = 0;$$

---

(1) *Cf.* Kœnigs, *Cinématique*, p. 154-156.

(2) Nous supprimons l'indice *zéro* devenu inutile.

l'équation différentielle des lignes asymptotiques, qui s'obtient en remplaçant, dans la précédente, X par

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} + q\zeta - r\eta\right) du^2$$
$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial v} + q_1\zeta - r_1\eta + \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + q\zeta_1 - r\eta_1\right) du\, dv + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + q_1\zeta_1 - r_1\eta_1\right) dv^2,$$

Y et Z par des expressions analogues. On retrouvera facilement ainsi des résultats connus (¹).

Il serait aisé de multiplier les exemples et les applications; d'étudier, par exemple, la distribution des éléments remarquables relatifs aux surfaces trajectoires des différents points M liés au trièdre mobile (²).

II. — Extension de la théorie précédente.

6. Nous utiliserons désormais quelques locutions que nous allons tout d'abord expliquer.

Un point d'un *espace* E′ à n dimensions sera déterminé par ses coordonnées, c'est-à-dire par un système de valeurs attribuées à n variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$.

Supposons $x'_1, x'_1, \ldots, x'_n$ fonctions de p variables $u_1, \ldots, u_p$. Nous dirons que ces fonctions définissent un *mouvement à p paramètres* d'un point M par rapport à E′. L'ensemble des points de E′ avec lesquels M vient coïncider est la *multiplicité trajectoire* de ce point.

Soient

$$(7) \qquad x_i = f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations d'un groupe fini et continu G à r paramètres. Nous considérerons souvent une transformation du groupe comme définissant un *changement de coordonnées* (relatif à G) dans l'espace E′.

Résolvons les formules (7) par rapport aux x' et dans les équa-

(¹) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, p. 382.

(²) La *Géométrie cinématique* de M. Mannheim contient un grand nombre de problèmes de cette nature.

tions

$$(8) \qquad x'_i = F_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ainsi obtenues, substituons aux a des fonctions de p variables u_1, $u_2, \ldots, u_p$,

$$(9) \qquad a_h = g_h(u_1, \ldots, u_p) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Les x étant regardés comme définissant les points d'un espace E, les formules exprimant les x' en fonction des x et des u définiront un *mouvement d'ensemble de l'espace* E *par rapport à l'espace* E', *relatif à* G, ce mouvement étant à p paramètres.

A chaque point M de E correspond un *mouvement d'entraînement* (par rapport à E').

Le mouvement d'ensemble peut être aussi bien défini par les formules (7) et (9); mais en considérant toujours les x' comme déterminés en fonction des x et des u.

Regardons aussi les x comme des fonctions données des paramètres u; en d'autres termes, définissons un mouvement à p paramètres d'un point par rapport à E. Nous l'appellerons le mouvement *relatif* et désignerons par mouvement *absolu* celui qui correspond à la superposition du mouvement relatif et du mouvement d'ensemble de E par rapport à E'. Le mouvement absolu se traduit analytiquement par les formules (8) où l'on remplace les x et les a par les fonctions correspondantes des variables u.

7. Au lieu de supposer les fonctions (9) connues, regardons-les comme déterminées par un système d'équations linéaires aux différentielles totales de la forme

$$(10) \qquad da_h = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jh}(a)\, l_j(du) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r).$$

Dans ces équations, les expressions $\alpha_{jh}(a)$ sont les coefficients des dérivées $\frac{\partial F}{\partial a_h}$ dans les transformations infinitésimales

$$(11) \qquad A_j F = \sum_{h=1}^{r} \alpha_{jh}(a) \frac{\partial F}{\partial a_h} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

du premier groupe des paramètres de G. Les symboles $l_j(du)$ désignent des expressions de Pfaff

$$(12) \qquad l_j(du) = \sum_{k=1}^{r} l_{jk}(u_1, \ldots, u_p)\, du_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

construites avec les variables u et leurs différentielles, et choisies de façon que (10) soit complètement intégrable [1].

A un même système (10) correspond une infinité de systèmes de fonctions a. Connaissant l'un d'eux, représenté par les équations (9), on obtient le système le plus général

$$(13) \quad a'_k = \gamma_k(u_1, u_2, \ldots, u_p; c_1, c_2, \ldots, c_r) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

dépendant de r arbitraires c, en remplaçant les a par leurs expressions (9) dans les équations finies

$$(14) \qquad a'_k = \varphi_k(c_1, \ldots, c_r; a_1, \ldots, a_r)$$

du premier groupe des paramètres [2].

Il semble donc qu'un système (10) définit une infinité de mouvements de E par rapport à E'. Mais *on peut regarder ces mouvements comme identiques,* la différence entre leur représentation analytique tenant au choix des coordonnées auxquelles on rapporte E'.

On peut, en effet, obtenir les transformations relatives aux a'

$$(15) \qquad x_i = f_i(x', a'),$$

en effectuant d'abord la transformation

$$(16) \qquad x''_i = f_i(x', c),$$

puis les suivantes

$$(17) \qquad x_i = f_i(x'', a).$$

Mais on peut regarder (16) comme définissant un changement de coordonnées (relatif à G) dans l'espace E'; ce qui établit la proposition.

---

(1) *Systèmes* (L), nos 4-5.
(2) *Ibid.*, no 11.

8. Nous supposerons que l'on donne : 1° le système (10) déterminant le mouvement d'ensemble de E par rapport à E'; 2° les fonctions x des paramètres u définissant le mouvement relatif d'un point (par rapport à E); et nous chercherons à *déterminer le mouvement absolu au voisinage d'un système donné* $u_1^0, \ldots, u_p^0$ *de valeurs des paramètres* $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Nous préciserons d'abord ces derniers mots.

Soient $a_1^0, \ldots, a_r^0$, r nombres choisis arbitrairement. Il existe un système de solutions de (10) et un seul tel que les valeurs initiales des a (valeurs pour $u = u^0$) soient précisément les constantes a^0 données. Au système ainsi défini de solutions de (10) et aux fonctions données x correspondent des fonctions x' bien déterminées des variables u. On se propose de développer ces dernières fonctions en séries entières (¹) par rapport aux différences $u_1 - u_1^0, \ldots, u_p - u_p^0$.

Les coefficients de ces séries sont, à des facteurs numériques près, les valeurs pour $u = u^0$ des x' et de leurs dérivées.

Les termes constants des développements s'obtiennent sans difficulté si l'on connaît les équations finies (7) du groupe G.

D'ailleurs, en choisissant, comme nous le ferons plus loin, pour constantes a^0 les valeurs des paramètres correspondant à la substitution identique, nous pourrons nous dispenser de chercher les équations finies de G.

9. Pour calculer les termes du premier ordre, rappelons que les seconds membres des équations (8) satisfont au système complet (²)

$$X_j F + A_j F = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{18}$$

où les $A_j F$ sont les transformations infinitésimales (11) du premier groupe des paramètres de G, et où les expressions

$$X_j F = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{19}$$

sont les transformations infinitésimales du groupe G.

(¹) Nous nous dispenserons d'énoncer les conditions restrictives qui assureraient la possibilité de ces développements.

(²) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*. t. I, p. 149.

Une fonction des x' devient par la substitution (8) une fonction des x et des a :

$$\Phi'(x'_1, \ldots, x'_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r), \tag{20}$$

la fonction Φ est une intégrale du système (18). En différentiant l'identité (20), il vient

$$d\Phi'(x') = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} da_h. \tag{21}$$

Remplaçons dans cette identité les a par le système de solutions de (10) considéré au n° 8, on a

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jh}(a)\, l_j(du) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^{r} \mathrm{A}_j \Phi\, l_j(du), \end{aligned}$$

et, puisque Φ est solution de (18),

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i - \sum_{j=1}^{r} \mathrm{X}_j \Phi\, l_j(du) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left[dx_i - \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x)\, l_j(du) \right]. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les x comme des fonctions données des paramètres u, Φ' devient une fonction Ψ de ces paramètres, et l'on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left[\frac{\partial x_i}{\partial u_k} - \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x)\, l_{jk}(u) \right]. \tag{22}$$

10. Supposons d'abord que les valeurs initiales a^0 des a correspondent à la substitution identique de (7). Nous désignerons par $y_1, \ldots, y_n$ les fonctions $x'_1, \ldots, x'_n$ que l'on détermine par ce choix particulier des constantes a^0.

Lorsque les a prennent ces valeurs a^0, $\Phi(x; a)$ et ses dérivées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

deviennent respectivement $\Phi'(x_1, \ldots, x_n)$ et

$$\frac{\partial\Phi'(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi'(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}.$$

Dans la formule (22) faisons $\Phi' = \Psi = y_i$, et donnons aux u les valeurs u^0; il vient

$$(23) \quad \left(\frac{\partial y_i}{\partial u_k}\right)^0 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right)^0 - \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x^0)\, l_{jk}(u^0) \qquad \begin{cases} (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (k = 1, 2, \ldots, p), \end{cases}$$

les nouveaux indices rappelant que l'égalité a lieu pour les valeurs u^0 des paramètres u.

11. Substituons maintenant à $a_1, \ldots, a_r$ d'autres solutions $a'_1, \ldots, a'_r$ de (10), prenant pour $u = u^0$ des valeurs initiales quelconques $a'^0_1, \ldots, a'^0_r$. Soient x' les fonctions définies par

$$x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n;\ a'_1, \ldots, a'_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les x' et les y définissent un même mouvement dans l'espace E', rapporté à deux systèmes distincts de coordonnées. Le changement de coordonnées est, comme on le voit facilement,

$$(24) \qquad y_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n;\ a'^0_1, \ldots, a'^0_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les a'^0 sont des constantes; on passera donc des dérivées $\frac{\partial y_i}{\partial u_k}$ aux dérivées $\frac{\partial x'_i}{\partial u_k}$ en résolvant, par rapport aux dernières, les formules obtenues en prolongeant une fois le groupe (24). Ce prolongement se fait en regardant les x' comme fonctions des p variables non transformées $u_1, \ldots, u_p$.

Remplaçant alors $u_1, \ldots, u_p$ par $u^0_1, \ldots, u^0_p$ dans les formules obtenues, on a les coefficients des termes du premier ordre des développements cherchés (n° 8).

Nous pouvons énoncer ce résultat d'une autre façon, en observant que les valeurs u^0 sont quelconques.

Appelons *fonctions adjointes d'ordre zéro* les fonctions données $x_1, \ldots, x_n$ des variables u: *fonctions adjointes*

du premier ordre celles que définissent les formules

$$(25)\quad \begin{cases} x_{i;\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u_k} - \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \xi_{ij}(x)\, l_{jk}(u), \\ \alpha_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k, \quad \alpha_k = 1, \quad [(i = 1, 2, \ldots, n) \quad (k = 1, 2, \ldots, p)]. \end{cases}$$

Considérons les fonctions x' définies par les équations (7) où l'on a remplacé les x par les fonctions d'ordre *zéro*, les a par un système *quelconque* de solutions de (10). Les valeurs des x' et de leurs dérivées premières s'obtiennent en prolongeant une fois le groupe (7) (à l'aide des variables u non transformées par ce groupe), remplaçant les x et leurs dérivées premières par les fonctions adjointes correspondantes, les a par le système considéré de solutions de (10), et résolvant les formules par rapport aux x' et à leurs dérivées.

12. Cet énoncé met bien en évidence le fait que le *calcul des x' et de leurs dérivées premières est entièrement analogue au calcul des x' seuls.*

C'est le groupe G_{1p} obtenu en prolongeant une fois G qui remplace ce dernier groupe; ce sont les $n + np$ fonctions adjointes d'ordre *zéro* et *un* qui remplacent les n fonctions adjointes d'ordre *zéro*.

D'une façon générale, soit G_{Np} le groupe obtenu en prolongeant G jusqu'à un ordre quelconque N (en regardant les x' comme fonctions de p variables non transformées). Les deux groupes G et G_{Np} ont même structure et même groupe des paramètres; et, dans les deux groupes, les mêmes valeurs des paramètres donnent la transformation identique.

Il résulte de là que *le calcul des dérivées secondes des x'* se fait par *un procédé analogue au précédent :* On définira d'abord des *fonctions adjointes du second ordre* en opérant sur les fonctions adjointes d'ordre *zéro* et *un* et sur G_{1p} comme on a opéré sur les fonctions adjointes d'ordre *zéro* et sur G pour obtenir les adjointes du premier ordre.

On désignera ces fonctions du second ordre par la notation $x_{i;\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, les indices α étant positifs ou nuls et leur somme étant égale à 2. Ces fonctions correspondent aux dérivées secondes

des x; par exemple si α_k et α_h sont égaux à 1, les autres α étant nuls, $x_{i;\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ et $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_h}$ se correspondent.

Au sujet du calcul de ces fonctions, il est bon d'observer que celles d'entre elles qui ont deux indices α non nuls peuvent s'obtenir de deux façons différentes. En tenant compte des conditions d'intégrabilité on pourrait vérifier l'identité des résultats obtenus, mais cette identité est manifeste quand on se reporte à l'interprétation, donnée plus loin, des valeurs numériques des fonctions adjointes.

On définit ensuite des fonctions adjointes d'ordre *trois*, et l'on parvient ainsi de proche en proche à des fonctions adjointes d'ordre quelconque.

On observe que *le calcul des fonctions adjointes utilise seulement les transformations infinitésimales de* G(¹) *et les expressions correspondantes* $l_j(du)$ *satisfaisant aux conditions d'intégrabilité* (²).

13. La solution du problème du n° 8 peut être présentée de la façon suivante :

Les coordonnées auxquelles on rapporte l'espace fixe E' *étant convenablement choisies, le mouvement absolu, au voisinage d'un système quelconque de valeurs* u^0 *des paramètres* u *est défini par les valeurs correspondantes des fonctions adjointes des différents ordres.*

Le choix particulier de coordonnées dont il est question ici est tel que, pour les valeurs u^0, les valeurs des x' soient égales à celles des x de même indice. Dès lors *les valeurs numériques des dérivées des* x' *sont égales à celles des fonctions adjointes correspondantes.*

Les fonctions adjointes d'ordres 1, 2, 3, ..., n *sont évidem-*

(¹) Celles des groupes G_{X_p} s'en déduisent aisément. *Voir* dans les *Annales de l'École Normale* (1903) le Mémoire cité de M. Vessiot (n° 4).

(²) Ces conditions peuvent être écrites quand on connaît les transformations infinitésimales de G; elles ne dépendent, en effet, que des constantes de structure. *Systèmes* (L), n° 4 et 5.

ment analogues aux projections des vitesses et des accélérations d'ordre 1, 2, ..., $n-1$ *sur les axes du trièdre mobile.* Il eût été facile de présenter le calcul de ces dernières de façon à accentuer encore cette analogie.

Le système (10) ne joue évidemment, dans tout ce qui précède, qu'un rôle secondaire; le mouvement d'entraînement est en réalité défini par les expressions $l_j(du)$. On peut d'ailleurs substituer au système (10) le système équivalent [1]

$$dx_i = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x)\, l_j(du). \tag{26}$$

Avec le langage que nous avons adopté, on voit que le système (26) détermine les coordonnées, relatives à E, d'un point fixe par rapport à E'. Cela résulte des formules (25).

14. Le résultat énoncé dans le numéro précédent donne évidemment un *principe de passage* permettant de déterminer les éléments géométriques remarquables des trajectoires absolues en rapportant ces éléments à l'espace mobile E; il suffit de remplacer les x' et leurs dérivées par les fonctions adjointes correspondantes dans les formules (supposées connues) qui détermineraient ces éléments remarquables si le mouvement absolu était explicitement donné.

Ce qui précède permettrait d'énoncer, pour des groupes finis quelconques, des propositions analogues à celles que l'on rencontre dans les applications de la Cinématique à la Géométrie. Les plus intéressantes de ces applications, celles qui concernent l'étude des courbes et des surfaces au moyen d'un trièdre mobile, seront généralisées, du moins en partie, dans la suite. Nous n'aurons alors à considérer que le cas du repos relatif (les adjointes d'ordre *zéro* seront des constantes); toutefois les considérations précédentes auraient été compliquées par l'introduction immédiate de cette hypothèse restrictive.

15. Nous allons calculer rapidement, à titre d'exemple, les fonc-

---

[1] *Systèmes* (L), n° 11.

tions adjointes d'ordre *un* et *deux* pour le groupe [1]

$$(27)\quad \begin{cases} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + x\,U, & X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial y} + y\,U, & X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial z} + z\,U, \\ X_4 f = z\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial z}, & X_5 f = x\dfrac{\partial f}{\partial z} - z\dfrac{\partial f}{\partial x}, & X_6 f = y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ & U = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} & \end{cases}$$

des transformations projectives laissant invariable la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, et pour les expressions

$$(28)\quad \begin{cases} l_1(du) = -(\xi\,du + \xi_1\,dv), & l_2(du) = -(\eta\,du + \eta_1\,dv), & l_3(du) = -(\zeta\,du + \zeta_1\,dv) \\ l_4(du) = \quad p\,du + p_1\,dv, & l_5(du) = \quad q\,du + q_1\,dv, & l_6(du) = \quad r\,du + r_1\,dv \end{cases}$$

nous supposerons x, y, z constants.

La structure du groupe (27) est donnée par les identités

$$(X_2X_3) = X_4,\quad (X_1X_4) = 0,\quad (X_1X_5) = X_3,\quad (X_1X_6) = -X_2,\quad (X_5X_6) = X_4,$$

et celles que l'on en déduit par les permutations circulaires des indices 1, 2, 3 d'une part, 4, 5, 6 d'autre part.

Pour que les expressions (28) définissent un mouvement d'ensemble à deux paramètres, il faut que les coefficients des expressions (28) satisfassent aux identités

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial v} - \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} = \eta\,r_1 - \eta_1\,r + \zeta_1\,q - \zeta\,q_1, & \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = \eta_1\zeta_1 - \eta_1\zeta + q\,r_1 - q_1\,r, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial v} - \dfrac{\partial\eta_1}{\partial u} = \zeta\,p_1 - \zeta_1\,p + \xi_1\,r - \xi\,r_1, & \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = \zeta\xi_1 - \zeta_1\xi + r\,p_1 - r_1\,p, \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial v} - \dfrac{\partial\zeta_1}{\partial u} = \xi\,q_1 - \xi_1\,q + \eta_1\,p - \eta\,p_1, & \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = \xi\eta_1 - \xi_1\eta + p\,q_1 - p_1\,q. \end{cases}$$

Les formules (25) donnent, pour les fonctions adjointes du premier ordre,

$$(30)\quad \begin{cases} x_{10} = \dfrac{\partial x}{\partial u} + (1 + x^2)\,\xi + xy\,\eta + xz\,\zeta + q\,z - r\,y, \\ x_{01} = \dfrac{\partial x}{\partial v} + (1 + x^2)\,\xi_1 + xy\,\eta_1 + xz\,\zeta_1 + q_1\,z - r_1\,y, \end{cases}$$

et des formules analogues pour y_{10}, y_{01}, z_{10}, z_{01}.

---

[1] Lie-Engel, *Transformationen gruppen*, t. III, p. 410. Ce groupe est celui des mouvements cayleyens, la quadrique étant prise pour absolu.

Voir (pour les nos 15 et 22) une Note de M. Demoulin, *Sur l'emploi d'un tétraèdre mobile en Géométrie Cayleyenne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIX, 8 août 1904).

Pour obtenir les fonctions adjointes du second ordre, nous utiliserons les transformations infinitésimales du groupe prolongé

$$X_1^{(1)}f = X_1 f + x_{10}\left(x\frac{\partial f}{\partial x_{10}} + y\frac{\partial f}{\partial y_{10}} + z\frac{\partial f}{\partial z_{10}}\right) + x\left(x_{10}\frac{\partial f}{\partial x_{10}} + y_{10}\frac{\partial f}{\partial y_{10}} + z_{10}\frac{\partial f}{\partial z_{10}}\right)$$
$$+ x_{01}\left(x\frac{\partial f}{\partial x_{01}} + y\frac{\partial f}{\partial y_{01}} + z\frac{\partial f}{\partial z_{01}}\right) + x\left(x_{01}\frac{\partial f}{\partial x_{01}} + y_{01}\frac{\partial f}{\partial y_{01}} + z_{01}\frac{\partial f}{\partial z_{01}}\right),$$
$$X_2^{(1)}f = \ldots, \qquad X_3^{(1)}f = \ldots,$$
$$X_4^{(1)}f = X_4 f + z_{10}\frac{\partial f}{\partial y_{10}} - y_{10}\frac{\partial f}{\partial z_{10}} + z_{01}\frac{\partial f}{\partial y_{01}} - y_{01}\frac{\partial f}{\partial z_{01}},$$
$$X_5^{(1)}f = \ldots, \qquad X_6^{(1)}f = \ldots.$$

On a ainsi

$$(31) \qquad x_{20} = \frac{\partial x_{10}}{\partial u} + (x_{10}x + xx_{10})\xi + (y_{10}x + yx_{10})\eta$$
$$+ (z_{10}x + zx_{10})\zeta + q\,z_{10} - r\,y_{10}$$

et des formules analogues pour $x_{11}, x_{02}, y_{20}, \ldots, z_{02}$.

Les formules (30) et (31) donnent pour l'origine du trièdre mobile ($x = y = z = 0$) les mêmes résultats que les formules (6). Cela tient à ce que les transformations infinitésimales (27) ne diffèrent de celles du groupe des mouvements euclidiens que par des termes du second ordre.

III. — Mouvement d'ensemble attaché a une multiplicité.

16. A tout point P d'une surface M de l'espace ordinaire correspond un trièdre remarquable T où $Pxyz$, tel que l'équation de la surface rapportée à T et résolue en z prend la forme réduite $z = ax^2 + by^2 + \ldots$, les termes non écrits étant du troisième ordre au moins. On sait d'ailleurs que $2a$ et $2b$ sont les inverses des rayons de courbures principaux de M en P.

Il est évident qu'à toute représentation paramétrique de la surface correspond un mouvement à deux paramètres du trièdre T; l'étude de ce mouvement peut être substituée à celle de la surface [1].

L'utilité de la notion précédente apparaît dans la recherche des

---

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, Livre V, Chap. I.

surfaces W dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation donnée [1]. On peut en effet la diviser en deux problèmes successifs : intégration d'un système résolvant (R) déterminant les translations et rotations du trièdre mobile T; intégration des systèmes (L) correspondant aux solutions de (R) et déterminant les positions respectives des trièdres fixes et mobiles. D'ailleurs à un même système de solutions de (R) correspond une famille de surfaces W égales entre elles.

17. Nous allons généraliser les résultats précédents, en considérant une multiplicité M à p dimensions contenue dans un espace E' à n dimensions et un groupe fini et continu G que nous supposerons transitif.

Soient $x'_1, \ldots, x'_n$ les coordonnées définissant les points de E' et

$$(32) \qquad x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations de G.

Supposons d'abord M définie par les expressions de x'_{p+1}, $x'_{p+2}, \ldots, x'_n$ en fonction de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$. Appelons *élément* de M [2] l'ensemble formé par un système de valeurs numériques de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ satisfaisant aux équations de M et par les valeurs numériques correspondantes des dérivées de $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$ par rapport à $x'_1, \ldots, x'_p$. Ces valeurs sont appelées *coordonnées de l'élément.*

Au groupe G, on peut faire correspondre, pour les multiplicités à p dimensions, un nombre limité de formes réduites, telles que tout élément ε d'une telle multiplicité M peut se mettre, à l'aide d'une transformation bien déterminée du groupe, sous l'une de ces formes réduites. Les coordonnées de l'élément réduit $\mathcal{E}$ sont égales, les unes à des constantes fixes, les autres à des invariants fonctions des coordonnées de l'élément initial.

---

(1) *Ibid.*, t. III, p. 317 et t. II, p. 345.

(2) Les notions d'élément et de forme réduite sont tirées de la thèse de M. Tresse, *Sur les invariants différentiels*, etc. (*Acta mathematica*, t. XVIII). *Voir* le Chapitre I de la troisième Partie de ce Mémoire et, en particulier, le théorème I dont l'énoncé est reproduit ci-dessus.

18. Si la multiplicité M est donnée par une représentation paramétrique

$$(33) \qquad x'_i = \psi_i(u_1, \ldots, u_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

un calcul de dérivées de fonctions implicites donnera, en fonction des paramètres u, les coordonnées de l'élément ε.

Écrivant alors que l'on passe de ε à l'élément réduit $\mathcal{E}$ par une transformation (32) convenablement prolongée, on détermine $a_1, \ldots, a_r$ en fonction de $u_1, \ldots, u_p$.

Regardons maintenant dans les équations (32) les x comme arbitraires, les a comme remplacés par les fonctions des variables u que l'on vient de déterminer; nous avons des formules définissant un *mouvement d'ensemble d'un espace* E *par rapport à l'espace* E'. Ce mouvement est à p paramètres $u_1, \ldots, u_p$, et relatif à G; la trajectoire du point de E dont les coordonnées x sont égales aux coordonnées d'ordre zéro [1] de l'élément réduit est précisément la multiplicité M.

Les fonctions $a_1, \ldots, a_r$ des variables $u_1, \ldots, u_p$ définissant ce mouvement d'ensemble déterminent [2] les expressions de Pfaff $l_1(du), \ldots, l_r(du)$ qui figurent dans les systèmes (L) correspondant à ce mouvement (nos 17 et 13). Nous dirons que *les expressions $l(du)$ correspondent à la multiplicité* M donnée par la représentation (33).

Il est aisé de voir [3] que *les expressions $l(du)$ correspondant à une multiplicité* M, *correspondent aussi à toutes les multiplicités déduites de* M *par les tranformations de* G *et à celles-là seulement.*

Si l'on changeait la représentation adoptée pour M, en prenant de nouveaux paramètres $v_1, \ldots, v_p$; les expressions de Pfaff $\lambda_1(dv), \ldots, \lambda_r(dv)$, correspondant à la nouvelle représentation, se déduiraient évidemment des anciennes $l_1(du), \ldots, l_r(du)$ par la transformation donnant $u_1, \ldots, u_p$ en fonction de $v_1, \ldots, v_p$.

19. Les systèmes (L) que l'on attache ainsi aux multiplicités à p dimensions de l'espace E' ont une forme particulière. Pour

---

(1) On peut supposer ces coordonnées constantes, puisque G est transitif.

(2) *Systèmes* (L), n° 4.

(3) *Ibid.*, n° 11.

écrire qu'un système (L)

$$(34)\qquad dx_i = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x)\, l_j(du) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

construit à l'aide des transformations infinitésimales de G et de r formes données $l(du)$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, appartient au type précédent, on procède de la façon suivante :

Prenant pour fonctions adjointes d'ordre *zéro*, $x_1, \ldots, x_n$, les constantes qui sont les coordonnées d'ordre *zéro* de l'élément réduit, on calcule les fonctions adjointes d'ordre supérieur (n^{os} **11**, **12**) (¹).

On écrit les équations qui donnent les dérivées de $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$ par rapport à $x'_1, \ldots, x'_p$ en fonction des x' et de leurs dérivées par rapport à $u_1, \ldots, u_p$. On y remplace les x' et leurs dérivées par rapport à $x'_1, \ldots, x'_p$ par les coordonnées constantes de l'élément réduit, les dérivées des x' par rapport aux u par les fonctions adjointes correspondantes. On élimine les dérivées restantes; les relations obtenues ainsi entre les coefficients des formes $l(du)$ sont les conditions cherchées.

Un calcul analogue donne les expressions des invariants différentiels en fonction des paramètres u.

Reprenons, à ce point de vue, l'exemple du n° **15**. Le groupe (27) est transitif, celles de ses transformations laissant invariant le point o, o, o engendrent le groupe des rotations autour de ce point. On peut donc prendre le même élément réduit, pour une surface, que dans le cas de l'espace euclidien, c'est-à-dire $x' = y' = z' = \frac{\partial z'}{\partial x'} = \frac{\partial z'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x' \partial y'} = 0$. Les expressions $\frac{1}{R} = \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\right)_0$, $\frac{1}{R'} = \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}\right)_0$ sont des invariants; nous appellerons R et R' *les rayons de courbure principaux cayleyens*.

En appliquant la méthode précédente, on voit que les formes (28) définiront le mouvement cayleyen attaché à une surface si l'on a

$$(35)\qquad \zeta = \zeta_1 = 0, \qquad \begin{vmatrix} p\eta - q\xi & \xi^2 & \eta^2 \\ p\eta_1 - q\xi_1 & \xi\xi_1 & \eta\eta_1 \\ p_1\eta_1 - q_1\xi_1 & \xi_1^2 & \eta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(¹) On pousse le calcul jusqu'aux fonctions d'ordre égal à l'ordre maximum des coordonnées constantes de l'élément réduit.

Les invariants $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ sont définis par les équations

$$\xi^2 \frac{1}{R} + \eta^2 \frac{1}{R'} = p\eta - q\xi,$$

$$\xi\xi_1 \frac{1}{R} + \eta\eta_1 \frac{1}{R'} = p\eta_1 - q\xi_1,$$

$$\xi_1^2 \frac{1}{R} + \eta_1^2 \frac{1}{R'} = p_1\eta_1 - q_1\xi_1,$$

compatibles en vertu de la dernière des identités (35).

20. Un grand nombre de problèmes de Géométrie se rattachent au type suivant :

Déterminer dans un espace E' *les multiplicités* M *à p dimensions dont les invariants vis-à-vis d'un groupe fini continu et transitif* G *satisfont à des relations données.*

Dans son Mémoire récent [1] *Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations*, M. Vessiot s'est occupé d'un problème beaucoup plus général. Il nous est facile de présenter d'une façon simple, dans le cas particulier qui nous occupe, l'un des intéressants résultats obtenus par M. Vessiot. On remarquera également que la méthode suivante est une généralisation de celle que l'on utilise dans la recherche des surfaces W.

Nous chercherons d'abord le mouvement d'ensemble attaché à une multiplicité inconnue M. A cet effet, nous formerons un système *résolvant* (R) auquel doivent satisfaire les coefficients des formes $l(du)$ pris comme inconnues auxiliaires. Les équations de (R) comprennent : 1° les équations du n° 19 exprimant que le système (L) correspond au mouvement d'ensemble relatif à G attaché à une multiplicité d'un nombre de dimensions donné; 2° les équations obtenues en remplaçant, dans les relations données, les invariants différentiels par leurs expressions en fonction des coefficients des formes $l(du)$ et de leurs dérivées.

---

[1] *Acta mathematica*, t. XXVIII.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Le système (R) est, en observant que $R = -\frac{\xi}{q}$, $R' = \frac{\eta_1}{p_1}$,

$$(37)\quad \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial v} = -\eta_1 r, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial u} = r_1 \xi, \\ \frac{\partial p_1}{du} = -q r_1, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = r p_1, \quad \frac{\partial r}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial u} = -q p_1 + \xi \eta_1, \\ F\left(-\frac{\xi}{q}, \frac{\eta_1}{p_1}\right) = 0. \end{cases}$$

Enfin le système (L) est ici

$$(38)\quad \begin{cases} dx = -(1+x^2)\xi\, du - xy\, \eta_1\, dv - zq\, du + y(r\, du + r_1\, dv), \\ dy = -xy\, \xi\, du - (1+y^2)\eta_1\, dv + z p_1\, dv - x(r\, du + r_1\, dv), \\ dz = -xz\, \xi\, du - yz\, \eta_1\, dv - y p_1\, dv + xq\, du. \end{cases}$$

Pour le remplacer par un système automorphe [1], on chercherait d'abord les transformations infinitésimales d'un groupe simplement transitif de même structure que (27).

On peut encore substituer à (38) un système linéaire, en utilisant le groupe adjoint de (27).

Il est plus simple de prendre des coordonnées homogènes [2]; on retrouve ainsi les résultats obtenus directement par M. Demoulin dans la Note citée plus haut.

22. La méthode précédente est applicable à des problèmes plus généraux, relatifs à des familles de multiplicités; c'est ainsi que M. Darboux [3] a employé la méthode du trièdre mobile dans la recherche des systèmes triples orthogonaux.

Indiquons rapidement comment on peut utiliser, pour le même problème, le groupe Γ des transformations isogonales de l'espace ordinaire.

On cherche d'abord une forme réduite à laquelle on puisse ramener, à l'aide d'une transformation de Γ, les équations de trois surfaces se coupant orthogonalement en un point. A l'aide des résultats donnés par M. Tresse [4], on établit sans difficulté

---

(1) *Systèmes* (L), n° 11.
(2) *Voir*, pour les formules de passage, Lie-Engel, t. I, p. 579.
(3) *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, t. I, Liv. II, Chap. II.
(4) Mémoire cité.

qu'on peut prendre

$$(39)\quad x=\frac{A}{2}(y^2-z^2)+\ldots,\quad y=\frac{B}{2}(z^2-x^2)+\ldots,\quad z=\frac{C}{2}(x^2-y^2)+\ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur à *deux*. De plus on prendra A, B, C liés par une relation non homogène, mais symétrique, telle que

$$(40)\qquad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=1.$$

Le groupe Γ est à dix paramètres. Donc un mouvement d'ensemble à trois paramètres, relatif à Γ, est défini par dix expressions de Pfaff à trois variables. Les trente coefficients de ces expressions étant pris comme inconnues, doivent satisfaire déjà à trente équations du premier ordre exprimant les conditions d'intégrabilité des systèmes (L) correspondants.

Si l'on veut exprimer ensuite qu'un pareil mouvement correspond, à l'aide de la forme réduite précédente [(39) et (40)], à un système triple orthogonal, il faut ajouter aux équations précédentes six équations d'ordre *zéro* et sept nouvelles équations du premier ordre.

En choisissant les paramètres du mouvement de telle façon que sur chaque surface du système triple l'un de ces trois paramètres reste constant, on réduit immédiatement le nombre des inconnues à 21, celui des équations à 34 (elles sont toutes du premier ordre). Les calculs qu'il faudrait faire pour pousser plus loin la réduction du nombre des inconnues seraient bien simplifiés par la symétrie qui persiste toujours.

De quelque façon que l'on écrive le système différentiel obtenu, à chacun de ses systèmes de solutions correspond une famille de ∞^{10} systèmes triples orthogonaux, se déduisant les uns des autres par des transformations isogonales. Leur détermination effective exigerait encore l'intégration d'un système (L) correspondant à Γ.

NOTE AU SUJET DES MOUVEMENTS A LA SURFACE DE LA TERRE;

Par M. le Comte de Sparre.

Dans l'étude des mouvements à la surface de la Terre on a coutume de négliger les termes de l'ordre du carré de la vitesse angulaire ω de la rotation de la Terre et cette manière de faire est parfaitement justifiée, car ces termes sont, d'une part, si petits qu'ils échapperaient complètement à l'observation et, d'autre part, beaucoup d'autres causes perturbatrices secondaires peuvent être du même ordre.

Toutefois, comme certains auteurs ont voulu tenir compte de ces termes en ω^2 et qu'ils l'ont fait d'une façon inexacte (¹), je me propose d'établir les équations du mouvement à la surface de la Terre en négligeant seulement les termes d'ordre supérieur à ω^3. Je me borne au cas de la Terre supposée sphérique et homogène; en réalité, l'influence de l'aplatissement de la Terre introduit des termes de l'ordre de ω^2, ainsi que j'ai eu occasion de le montrer dans un petit Mémoire en cours de publication, mais je laisse ici cette influence de côté en me bornant, comme je viens de le dire, au cas de la Terre supposée sphérique et homogène; le problème est en effet beaucoup plus simple dans ce cas et sa solution m'a paru présenter de l'intérêt, ne fût-ce qu'au point de vue théorique.

Je remarquerai d'abord que si R est le rayon de la Terre on a sensiblement

$$\frac{1}{R} = 1,2\,\omega^{\frac{5}{3}},$$

d'où

$$\frac{1}{R^2} = 1,44\,\omega^{3+\frac{1}{3}}.$$

Donc, en négligeant les termes en $\frac{1}{R^2}$, nous ne négligerons que des termes d'ordre supérieur à ω^3.

Ceci posé :

Soit un système rectangulaire OXYZ où OZ a la direction de la

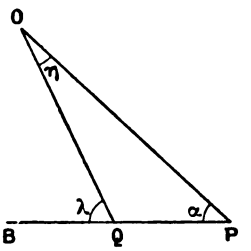
(¹) J'ai eu, en particulier, occasion de le faire voir dans une Communication récente pour le cas de la chute libre des graves.

verticale dirigée vers le bas, OX est dans le plan du méridien et dirigé vers le sud et OY dirigé vers l'est. Soit de plus un second système OX'YZ', qui a OY en commun avec le précédent et dans lequel OZ' est dirigé suivant le rayon terrestre et OX' toujours vers le sud dans le plan du méridien.

Je désigne de plus par λ la latitude vraie au point O, c'est-à-dire l'angle de OZ avec le plan de l'équateur, par α la latitude géocentrique au même point O [1], par G l'attraction de la Terre sur l'unité de masse en O et par g la gravité au même point.

La gravité est la résultante de l'attraction G de la Terre en O et de la force centrifuge au même point, $\omega^2 R \cos\alpha$ [2].

Fig. 1.



Le triangle de composition de la gravité en O dans lequel $OQ = g$, $OP = G$, $PQ = \omega^2 R \cos\alpha$, $OPQ = \alpha$, $OQB = \lambda$, $QOP = \eta$ donne

$$(1)\qquad \begin{cases} G \sin\eta = \omega^2 R \cos\alpha \sin\lambda, \\ g \sin\eta = \omega^2 R \cos\alpha \sin\alpha, \\ G = g \cos\eta + \omega^2 R \cos^2\alpha, \\ \alpha = \lambda - \eta. \end{cases}$$

Soit maintenant un point M dont les coordonnées sont x, y, z par rapport au système OXYZ et x', y', z' par rapport au système OX'YZ', et soit δ la distance de ce point au centre de la Terre.

Ce point est soumis de la part de la Terre, supposée, ainsi que nous l'avons dit, sphérique et homogène, s'il s'agit d'un point

---

(1) Donc l'angle de OZ' avec le plan de l'équateur.

(2) En désignant ici par R la distance du point O au centre de la Terre, distance qui diffère fort peu du rayon de la Terre.

extérieur à sa surface, à une attraction égale à $\frac{GR^2}{\delta^2}$ dirigée suivant MC, C étant le centre de la Terre; elle aura pour composantes, suivant OX′, OY, OZ′,

$$-\frac{GR^2x'}{\delta^3},\quad -\frac{GR^2y}{\delta^3},\quad \frac{GR^2(R-z')}{\delta^3},$$

mais on a

$$\delta^2=(R-z')^2+x'^2+y^2=(R-z')^2\left[1+\frac{x'^2+y^2}{(R-z')^2}\right],$$

de sorte que si nous négligeons les termes de l'ordre de $\frac{1}{R^2}=1,44\,\omega^{3+\frac{1}{3}}$ nous pourrons prendre, pour les trois composantes de l'attraction,

$$-\frac{Gx'}{R},\quad -\frac{Gy}{R},\quad G\left(1+\frac{2z'}{R}\right).$$

S'il s'agissait de la chute dans un puits, puisque nous supposons la Terre sphérique et homogène, l'attraction serait $\frac{G\delta}{R}$ et ses composantes parallèles à OX′, OY, OZ′ seraient, par suite,

$$-\frac{Gx'}{R},\quad -\frac{Gy}{R},\quad G\left(1-\frac{z'}{R}\right).$$

Nous considérerons alors l'attraction comme la résultante d'une force constante comme grandeur et direction et égale à l'attraction G de la Terre sur l'unité de masse en O et d'une force déviatrice dont les composantes parallèles aux axes OX′, OY, OZ′ sont : dans le cas de points extérieurs à la surface de la Terre,

$$-\frac{Gx'}{R},\quad -\frac{Gy}{R},\quad \frac{2Gz'}{R},$$

et, dans le cas de points intérieurs,

$$-\frac{Gx'}{R},\quad -\frac{Gy}{R},\quad -\frac{Gz'}{R}.$$

Cette force déviatrice aura pour composante parallèle à l'axe OX, dans le premier cas,

$$X_1=-\frac{G}{R}(x'\cos\eta+2z'\sin\eta),$$

et, dans le second,

$$X'_1 = -\frac{G}{R}(x' \cos\eta - z' \sin\eta).$$

Mais l'on a

$$x' = x\cos\eta + z\sin\eta, \qquad z' = z\cos\eta - x\sin\eta,$$

et, par suite,

$$X_1 = -\frac{G}{R}[x(1 - 3\sin^2\eta) + 3z\sin\eta\cos\eta], \qquad X'_1 = -\frac{G}{R}x.$$

Nous aurons ensuite

$$Y_1 = -\frac{Gy}{R}$$

puis, pour des points extérieurs,

$$Z_1 = \frac{G}{R}[2z'\cos\eta - x'\sin\eta] = \frac{G}{R}[z(2 - 3\sin^2\eta) - 3x\sin\eta\cos\eta]$$

et, pour des points intérieurs,

$$Z'_1 = -\frac{G}{R}z.$$

En tenant compte d'ailleurs des relations (1) les valeurs précédentes de X_1 et Z_1 pourront s'écrire

$$X_1 = -\frac{Gx}{R}(1 - 3\sin^2\eta) - 3\omega^2 z\cos\alpha\sin\lambda\cos\eta,$$

$$Z_1 = \frac{Gz}{R}(2 - 3\sin^2\eta) - 3\omega^2 x\cos\alpha\sin\lambda\cos\eta.$$

Nous considérons donc l'attraction de la Terre sur le point M, de masse *un*, comme la résultante de la force G, constante de grandeur et de direction, et des forces X_1, Y_1, Z_1 ou X'_1, Y_1, Z'_1.

Ceci posé, le système OXYZ a d'abord un mouvement d'entraînement qui est une translation égale à celle de son origine O; pour tenir compte de ce mouvement d'entraînement, on doit appliquer au point M une force égale à la force centrifuge en O, $\omega^2 R\cos\alpha$; cette force centrifuge constante de grandeur et de direction se combine à l'attraction G en O, également constante, pour donner la gravité g en O. On voit donc que, pour tenir compte du mou-

vement d'entraînement dû à la translation du système égale à celle de son origine, il suffit de remplacer l'attraction de la Terre G en O par la gravité g au même point, g étant constant de grandeur et parallèle à la verticale OZ en O.

Mais le système OXYZ a, en plus de la translation égale à celle de son origine O, une rotation autour d'un axe OI parallèle à celui de la Terre. Cette rotation donnera naissance :

1° A une force centrifuge composée dont les composantes parallèles à OX, OY, OZ sont, comme on sait,

$$X_2 = 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt},$$

$$Y_2 = 2\omega \cos\lambda \frac{dz}{dt} - 2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt},$$

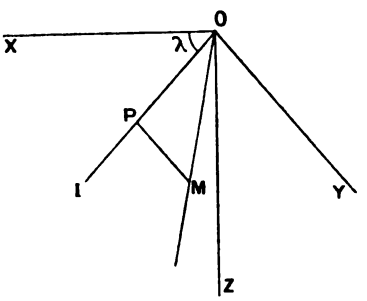
$$Z_2 = -2\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt};$$

2° A une force centrifuge dont les composantes parallèles aux axes sont

$$X_3 = \omega^2 r \cos(r, X),$$
$$Y_3 = \omega^2 r \cos(r, Y),$$
$$Z_3 = \omega^2 r \cos(r, Z),$$

r désignant la perpendiculaire PM abaissée de M sur OI.

Fig. 2.



Mais $r\cos(r, X)$ est la projection de PM sur OX, projection qui est égale à celle du contour POM. D'ailleurs OP est la projection de OM sur OI, projection qui est égale à la somme de celles des coordonnées du point M.

On a donc

$$OP = x\cos\lambda + z\sin\lambda,$$

$$r\cos(r, X) = x - (x\cos\lambda + z\sin\lambda)\cos\lambda = (x\sin\lambda - z\cos\lambda)\sin\lambda.$$

On a donc, en opérant de même pour les trois axes,

$$X_3 = \omega^2\sin\lambda(x\sin\lambda - z\cos\lambda),$$
$$Y_3 = \omega^2 y,$$
$$Z_3 = \omega^2\cos\lambda(z\cos\lambda - x\sin\lambda).$$

Dans son mouvement relatif par rapport à la Terre, le point mobile est donc soumis, par suite de son mouvement relatif et de l'attraction de la Terre, aux forces :

1° S'il s'agit de points extérieurs,

$$X = -\frac{G}{R}x(1 - 3\sin^2\eta) - 3\omega^2 z\cos\alpha\sin\lambda\cos\eta$$
$$+ 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2\sin\lambda(x\sin\lambda - z\cos\lambda),$$

$$Y = -\frac{G}{R}y + 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 y,$$

$$Z = g + \frac{G}{R}z(2 - 3\sin^2\eta) - 3\omega^2 x\cos\alpha\sin\lambda\cos\eta - 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}$$
$$+ \omega^2\cos\lambda(z\cos\lambda - x\sin\lambda);$$

2° S'il s'agit de points intérieurs,

$$X' = -\frac{G}{R}x + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2\sin\lambda(x\sin\lambda - z\cos\lambda),$$
$$Y' = Y,$$
$$Z' = g - \frac{G}{R}z - 2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} + \omega^2\cos\lambda(z\cos\lambda - x\sin\lambda).$$

Nous remarquerons que dans l'établissement de ces équations on a négligé les termes d'ordre supérieur à ω^3, il ne faudra donc pas pousser l'approximation au delà des termes en ω^3; de plus, η est de l'ordre de $\omega^2 R$, donc de l'ordre de $\omega^{\frac{1}{3}}$ et, par suite, $\frac{\eta^4}{R}$ sera de l'ordre de ω^3 et $\omega^2\eta^4$ de l'ordre $\omega^{3+\frac{1}{3}}$.

Il est facile, en partant de ces formules, de retrouver les résultats que j'ai donnés pour la déviation des corps dans la chute libre. Dans ce cas, en effet, y contient ω en facteur et x au moins ω^2;

$\frac{1}{R}$ étant de l'ordre $\omega^{\frac{5}{3}}$ on doit réduire les formules aux suivantes, en supposant que l'on se borne à calculer la déviation suivant OX dans le plan du méridien :

Pour la chute du haut d'une tour,

$$X = -3\omega^2 z \cos\alpha \sin\lambda \cos\eta + 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2 z \sin\lambda \cos\lambda,$$

et, pour la chute dans un puits,

$$X' = 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt} - \omega^2 z \sin\lambda \cos\lambda.$$

Comme d'ailleurs une première approximation nous donne pour z, aux termes en $\omega^{\frac{5}{3}}$ près (¹),

$$z = \frac{1}{2} g t^2,$$

et pour y, aux termes en $\omega^{3+\frac{2}{3}}$ près,

$$y = \frac{1}{3} \omega \cos\lambda \, g t^3,$$

nous aurons donc, aux termes en $\omega^{3+\frac{2}{3}}$ près,

$$X = \frac{3}{2} \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda \, g t^2 - \frac{3}{2} \omega^2 \cos\alpha \sin\lambda \cos\eta \, g t^2,$$

$$X' = \frac{3}{2} \omega^2 \sin\lambda \cos\lambda \, g t^2.$$

Mais

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cos\eta &= \cos\eta (\cos\lambda \cos\eta + \sin\lambda \sin\eta) \\ &= \cos\lambda + \sin\eta (\sin\lambda \cos\eta - \cos\lambda \sin\eta) \\ &= \cos\lambda + \sin\eta \sin\alpha. \end{aligned}$$

On aura donc

$$X = -\frac{3}{2} \omega^2 \sin\lambda \sin\eta \sin\alpha \, g t^2$$

(¹) $\frac{1}{R}$ étant de l'ordre de $\omega^{\frac{5}{3}}$.

ou, en tenant compte de la relation

$$\sin\eta = \frac{\omega^2 R \cos\alpha \sin\alpha}{g},$$

$$X = -\frac{3}{2}\omega^4 R t^2 \sin\lambda \sin^2\alpha \cos\alpha.$$

Si d'ailleurs on se borne à la partie principale, on remplace α par λ, puisque $\alpha = \lambda - \eta$. On a alors, pour la chute du haut d'une tour,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{3}{2}\omega^4 R t^2 \sin^3\lambda \cos\lambda,$$

d'où une déviation vers le nord donnée par la formule

$$x = -\frac{1}{8} R \omega^4 t^4 \sin^3\lambda \cos\lambda$$

ou, en introduisant la hauteur de chute $h = \frac{1}{2} g t^2$,

$$x = -\frac{1}{2}\frac{R\omega^4 h^2}{g^2}\sin^3\lambda \cos\lambda.$$

On a au lieu de cela, pour la chute dans un puits,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{3}{2}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^2$$

et, par suite, on a une déviation vers le sud donnée par la formule

$$x = \frac{1}{8}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^4$$

ou, en introduisant la hauteur de chute,

$$x = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 h^2}{g}\sin\lambda \cos\lambda.$$

Si l'on tenait compte de la forme elliptique du méridien terrestre on arriverait, dans tous les cas, à une déviation vers le sud, mais je n'aborderai pas cette étude, mon but ayant été de faire voir la manière dont on peut tenir compte, lorsqu'on veut garder les termes en ω^2, de la force centrifuge due à la rotation autour de OI, ainsi que de l'influence de l'angle η.

SUR QUELQUES QUESTIONS DE CALCUL DES VARIATIONS;

Par M. Hadamard.

Dans une Communication précédente [1] j'avais donné une condition nécessaire (correspondant à la condition de Legendre ou à celle de Weierstrass) pour le minimum d'une intégrale n^{uple} dans laquelle figurent m fonctions inconnues. J'avais ajouté que la méthode de Clebsch [2] fournissait une condition équivalente à la précédente pour $m = n = 2$ (l'équivalence étant douteuse pour les valeurs supérieures de m et de n) et qui était capable de jouer le rôle de la condition de Legendre-Weierstrass comme condition suffisante.

Ce dernier point n'était pas exact et, comme on va le voir, la question est loin d'être élucidée, même pour ce cas, le plus simple, de $m = n = 2$.

Soient z_1, z_2 les fonctions inconnues des variables x, y; p_1, q_1, p_2, q_2 leurs dérivées partielles. Toute condition analogue à celle de Legendre ou celle de Weierstrass pour le minimum faible (pour nous en tenir à ce cas) fait intervenir une certaine forme F, quadratique en p_1, q_1, p_2, q_2.

I. La condition *nécessaire* que nous avons obtenue précédemment est que F soit essentiellement positive pour toutes les valeurs (non nulles) des variables p_1, q_1, p_2, q_2 qui satisfont à la relation

$$p_1 q_2 - q_1 p_2 = 0. \tag{1}$$

II. La méthode de *Clebsch* donne comme condition *suffisante* que la forme quadratique

$$F + \lambda(p_1 q_2 - q_1 p_2) \tag{2}$$

(où λ est fonction de x et de y, mais non des p, q) soit définie positive. A cette condition doit, bien entendu, être jointe une *condition de Jacobi*.

---

(1) Ce *Bulletin*, t. XXX, 1902, p. 253.
(2) *Journal de Crelle*, t. 56, 1859.

Celle-ci, dans le cas actuel, consiste dans l'existence de deux solutions (ζ_1, ζ_2), (τ_1, τ_2) des *équations aux variations,* telles que le déterminant

$$\Delta = \zeta_1 \tau_2 - \zeta_2 \tau_1$$

ne s'annule pas dans le domaine d'intégration.

Si λ pouvait être choisi arbitrairement, la condition que $F + \lambda(p_1 q_2 - q_1 p_2)$ puisse être rendue définie par ce choix de λ serait équivalente à la condition nécessaire précédemment énoncée.

Mais tel n'est pas le cas. Ainsi qu'il résulte de l'analyse de Clebsch, les valeurs de λ sont déterminées par celles des solutions ζ, τ, ou, du moins, une fois ces solutions choisies, λ ne contient plus qu'une constante arbitraire C.

Il ne suffit donc pas que, pour chaque système de valeurs de x et de y, il existe des valeurs de λ qui rendent définie positive la forme (2). Soit

$$\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2 \tag{3}$$

l'intervalle qui comprend ces valeurs de λ. Il faudrait encore que l'on puisse déterminer la constante C de manière que, pour tous les couples de valeurs de x, y compris dans l'aire d'intégration, l'inégalité (3) soit vérifiée, autrement dit, que le minimum de la valeur de C déduite (en chaque point) de la relation $\lambda = \lambda_2$ ne soit pas inférieur au maximum de la valeur de C déduite de $\lambda = \lambda_1$.

Si même on prenait de toutes les manières possibles les solutions ζ, τ des équations aux variations, la fonction λ ne pourrait pas être prise à volonté. Elle satisferait à un système d'équations aux dérivées partielles S (vraisemblablement compliqué) résultant de l'élimination de ζ_1, ζ_2; τ_1, τ_2 entre les équations aux variations (au nombre de quatre pour les deux systèmes) et les deux relations qui définissent λ, les six équations ainsi écrites se réduisant d'ailleurs à cinq, grâce à ce fait que le système des équations aux variations est identique à son adjoint.

On serait alors conduit à la question suivante :

Existe-t-il une solution du système S *satisfaisant, dans toute l'aire d'intégration, aux inégalités* (3)?

Ce problème appartient à la même catégorie de questions dont celui que nous avons rencontré tout à l'heure offre un exemple simple, catégorie probablement assez digne d'attirer l'attention.

Bien entendu, une fois prise une telle solution λ, il faudrait calculer les solutions ζ, τ correspondantes et vérifier la condition de Jacobi $\Delta \gtrless 0$.

III. La méthode de *Hilbert* (dont la méthode de Clebsch n'est d'ailleurs pas distincte au fond) conduit à des résultats tout semblables.

Pour qu'une fonction de x, y, z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2, intégrée par rapport à x et à y, donne un résultat dépendant du contour seul, il faut tout d'abord qu'elle ait la forme

$$\varphi = A + B_1 p_1 + C_1 q_1 + B_2 p_2 + C_2 q_2 + D(p_1 q_2 - q_1 p_2)$$

(A, B, ... fonctions de x, y, z_1, z_2); forme qui renferme en général, comme on le voit, un terme non linéaire par rapport aux dérivées premières.

Pour suivre la marche indiquée par M. Hilbert, nous prendrons tout d'abord

$$(4) \quad \varphi = f(x, y, z_1, z_2, \varpi_1, \chi_1, \varpi_2, \chi_2) + (p_1 - \varpi_1) f_{\varpi_1} + (p_2 - \varpi_2) f_{\varpi_2} + (q_1 - \chi_1) f_{\chi_1} + (q_2 - \chi_2) f_{\chi_2},$$

où f est la fonction donnée sous le signe $\int\int$, de manière que

$$\int\int (x, y, z_1, z_2, p_1, p_2, q_1, q_2)\, dx\, dy$$

est l'intégrale dont on cherche l'extremum, et où ϖ_1, ϖ_2, χ_1, χ_2 sont définies de la manière suivante :

On considère une famille d'extrémales dépendant de deux constantes arbitraires a, b

$$(5) \qquad z_1 = \Psi_1(x, y, a, b), \qquad z_2 = \Psi_2(x, y, a, b),$$

ces équations étant supposées résolubles par rapport à a, b, de sorte que le déterminant

$$(6) \qquad \frac{D(\Psi_1, \Psi_2)}{D(a, b)}$$

ne s'annule en aucun point de l'aire d'intégration.

Géométriquement parlant, les fonctions z_1, z_2 de x et de y représentent une multiplicité deux fois étendue tracée dans l'espace à quatre dimensions, ou, plus commodément, un couple de surfaces dans l'espace ordinaire, avec cette convention que l'on considère comme faisant un tout indissoluble les deux points qui, pris respectivement sur les deux surfaces, ont même projection sur le plan des xy (¹). Ce sont deux points ainsi situés sur une même parallèle à l'axe des z que nous nommerons un *couple* de points. La condition imposée aux extrémales (5) revient à dire qu'on peut les faire passer par tout couple de points donné (suffisamment voisin de l'extrémale que l'on considère).

Cela posé, ϖ_1, χ_1, ϖ_2, χ_2 sont les dérivées partielles de z_1, z_2 tirées des équations (5). Ce sont donc des fonctions de x, y, a, b et par conséquent (en vertu de la résolubilité précédemment postulée) de fonctions de x, y, z_1, z_2, de sorte que l'expression (4) est une fonction de x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2.

Le calcul fait intervenir plusieurs espèces de dérivées, savoir :

1° Les dérivées d'une fonction de x, y, z_1, z_2, p_1, q_1, p_2, q_2, lorsque ces huit quantités sont considérées comme des variables indépendantes; nous les désignons par des indices, Φ_{p_1} désignant, par exemple, la dérivée de Φ par rapport à p_1. C'est ce qui est fait dans la formule (4), où f_{ϖ_1} représente la valeur de f_{p_1} lorsqu'on y remplace p_1, p_2, q_1, q_2 par ϖ_1, ϖ_2, χ_1, χ_2.

2° Les dérivées d'une fonction de x, y, z_1, z_2 par rapport à ces quantités considérées comme variables indépendantes. Nous les désignerons par le symbole δ. Pour une fonction Φ de x, y, z_1, z_2, ϖ_1, χ_1, ϖ_2, χ_2 on a

$$(7)\quad \frac{\delta\Phi}{\delta z_i} = \Phi_{z_i} + \Phi_{\varpi_1}\frac{\delta\varpi_1}{\delta z_i} + \Phi_{\varpi_2}\frac{\delta\varpi_2}{\delta z_i} + \Phi_{\chi_1}\frac{\delta\chi_1}{\delta z_i} + \Phi_{\chi_2}\frac{\delta\chi_2}{\delta z_i} \qquad (i = 1, 2).$$

3° Les dérivées prises suivant le couple de surfaces (quelconque d'ailleurs) dont les plans tangents ont pour coefficients angulaires p_1, q_1, p_2, q_2. Nous les désignerons par le symbole ∂; on a (pour

(¹) En particulier, ces surfaces sont limitées à deux contours donnés C_1, C_2, lesquels font partie d'un même cylindre parallèle à l'axe des z.

une fonction de x, y, z_1, z_2)

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\delta}{\delta x} + p_1 \dfrac{\delta}{\delta z_1} + p_2 \dfrac{\delta}{\delta z_2}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\delta}{\delta y} + q_1 \dfrac{\delta}{\delta z_1} + q_2 \dfrac{\delta}{\delta z_2}. \end{cases}$$

4° Les dérivées prises suivant les extrémales (4), en regardant, par conséquent, z_1, z_2 comme fonctions de x, y et a, b comme constants. Ces dérivées, qui seront désignées par le symbole $\mathfrak{d}$, sont liées aux dérivées δ par la relation

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}x} = \dfrac{\delta}{\delta x} + \varpi_1 \dfrac{\delta}{\delta z_1} + \varpi_2 \dfrac{\delta}{\delta z_2}, \\ \dfrac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}y} = \dfrac{\delta}{\delta y} + \chi_1 \dfrac{\delta}{\delta z_1} + \chi_2 \dfrac{\delta}{\delta z_2}. \end{cases}$$

Cela posé, les conditions pour que, φ étant l'expression (4), l'intégrale $\int\int \varphi\, dx\, dy$ ne dépende que du contour, soit

$$\frac{\delta\varphi}{\delta z_1} - \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{p_1} - \frac{\partial}{\partial y}\varphi_{q_1} = 0, \qquad \frac{\delta\varphi}{\delta z_2} - \frac{\partial}{\partial x}\varphi_{p_2} - \frac{\partial}{\partial y}\varphi_{q_2} = 0$$

(égalités devant avoir lieu quels que soient les p, q) se réduisent, en tenant compte des formules (8) et de ce que les surfaces (5) sont des extrémales, à

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta z_2} f_{\varpi_1} - \dfrac{\delta}{\delta z_1} f_{\varpi_2} = 0, \\ \dfrac{\delta}{\delta z_2} f_{\chi_1} - \dfrac{\delta}{\delta z_1} f_{\chi_2} = 0. \end{cases}$$

Elles ne seront donc pas vérifiées en général.

Mais si (ce que nous avons le droit de faire) nous ajoutons à f les deux termes intégrables

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\mu p_1 z_2) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu q_1 z_2) &= \frac{\partial\mu}{\partial y} p_1 z_2 - \frac{\partial\mu}{\partial x} q_1 z_2 + \mu(p_1 q_2 - q_1 p_2) \\ &= \frac{\delta\mu}{\delta y} p_1 z_2 - \frac{\delta\mu}{\delta x} q_1 z_2 + \lambda(p_1 q_2 - q_1 p_2) \end{aligned}$$

(μ étant une fonction de x, y, z_1, z_2 et λ désignant la combinaison

$$\lambda = \mu + z_2 \frac{\delta\mu}{\delta z_2}\Big),$$

ou encore si, sans changer f, nous ajoutons à l'expression (4) le terme

$$-\lambda[(p_1-\varpi_1)(q_2-\chi_2)-(p_2-\varpi_2)(q_1-\chi_1)],$$

les équations (10) sont remplacées par

$$(10')\quad \begin{cases} \dfrac{\delta}{\delta z_2} f_{\varpi_1} - \dfrac{\delta}{\delta z_1} f_{\varpi_2} + \lambda\left(\dfrac{\delta\chi_1}{\delta z_1} + \dfrac{\delta\chi_2}{\delta z_2}\right) + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\delta}{\delta z_2} f_{\chi_1} - \dfrac{\delta}{\delta z_1} f_{\chi_2} + \lambda\left(\dfrac{\delta\varpi_1}{\delta z_1} + \dfrac{\delta\varpi_2}{\delta z_2}\right) + \dfrac{\partial\lambda}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

et, pour satisfaire aux conditions du problème, nous n'aurons qu'à déterminer λ par ces dernières équations.

Or celles-ci ne seront autres que les équations posées par Clebsch. Il suffit, pour les ramener à la forme de Clebsch, de transformer les dérivées δ en remplaçant les variables indépendantes z_1, z_2 par les variables a, b. Les dérivées des unes par rapport aux autres sont les quantités précédemment désignées par ζ_1, ζ_2, τ_1, τ_2, et le déterminant fonctionnel (6) est celui que nous avions appelé Δ.

Comme dans la méthode de Clebsch, par conséquent, les équations (10') forment un système complètement intégrable et ont, par conséquent, une solution λ dépendant d'une constante arbitraire.

Nous sommes donc amenés exactement au même point que dans la méthode précédente et nous aurions à étudier un système analogue à S (mais notablement plus compliqué et plus difficile à former, puisque les équations ne seraient plus linéaires) obtenu en éliminant z_1, z_2 entre les équations (10') et celles qui expriment que la famille (5) est composée d'extrémales. Nous devrons exprimer que ce système admet une solution satisfaisant aux inégalités (3).

IV. En réalité, on doit présumer que la discussion dont nous venons de parler n'est pas nécessaire.

Si, en effet, nous considérons, non plus la méthode de Hilbert, mais la méthode de *Weierstrass* sous sa forme primitive, nous arriverons à des conclusions d'une forme notablement différente.

Soient, en effet, (s_1, s_2) le couple de surfaces qui constitue l'extrémale étudiée; (S_1, S_2) un autre couple qu'on veut lui com-

parer, et qui est limité au même contour (C_1, C_2). Sur (S_1, S_2) traçons un couple de contours variables (γ_1, γ_2) (γ_1 et γ_2 étant, bien entendu, situés sur un même cylindre parallèle à Ox). Par (γ_1, γ_2) faisons passer un couple de surfaces (Σ_1, Σ_2) constituant une *extrémale*. Si cette dernière construction est toujours possible, il suffira de faire varier les contours γ_1, γ_2 depuis un couple de points jusqu'à la position (C_1, C_2) pour appliquer le raisonnement de Weierstrass.

Or la condition, analogue à celle de Legendre, à laquelle on arrive ainsi (pour le minimum faible) est la condition *nécessaire* rappelée en premier lieu.

Seulement, en opérant ainsi, la difficulté apparaît dans la condition de Jacobi. Au lieu de supposer simplement l'existence d'une famille d'extrémales à deux paramètres, il faudrait exprimer que l'on peut construire le couple extrémal (Σ_1, Σ_2), c'est-à-dire résoudre un problème de Dirichlet à deux inconnues dans les conditions les plus générales et les plus difficiles, puisque γ_1 et γ_2 sont quelconques.

L'état actuel de la Science ne permettrait pas, par exemple, de déduire de cette méthode l'existence du minimum dans une aire d'intégration très petite; ce qui résulte, au contraire, des méthodes de Clebsch-Hilbert, puisque, en raison de la constante arbitraire qui figure dans λ, on peut toujours supposer que cette quantité satisfait aux inégalités (3) aux environs d'un point donné quelconque.

Je terminerai en indiquant quelques points sur lesquels, dans les leçons professées au Collège de France il y a deux ans, j'ai dû compléter les résultats acquis en Calcul des variations.

Le premier concerne les *problèmes isopérimétriques,* dans lesquels on cherche l'extremum d'une certaine intégrale I_0, connaissant les valeurs d'une ou plusieurs autres intégrales données et certaines conditions accessoires. Le résultat fondamental (qui ramène cet extremum à un extremum libre par l'intervention d'un multiplicateur) a dû être étendu au cas où, parmi les conditions accessoires, figurent des conditions d'inégalité. Il reste encore vrai dans ce cas; mais la démonstration fait appel à des considérations sensiblement différentes des considérations classiques.

D'autre part, la question de savoir si la *construction de Weierstrass* est possible, dans ce même problème isopérimétrique, peut, dans beaucoup de cas, être considérée comme résolue si l'arc considéré satisfait aux conditions suffisantes du minimum (par exemple) pour l'intégrale $I_0 + lI_1$ (I_1 étant l'intégrale donnée et l le multiplicateur), ce minimum étant considéré comme libre. On constate, en effet, dans ces conditions, que la valeur de $I_0 + lI_1$ est une fonction croissante de l lorsque cette quantité varie pendant que les extrémités restent fixes. Cette remarque sera, par exemple, très utile pour la démonstration de l'existence du minimum dans une région suffisamment petite.

Enfin je noterai encore une simplification assez grande que l'on peut apporter à la démonstration du théorème de M. Osgrod, d'après lequel on peut assigner une limite inférieure à la différence qui existe entre l'intégrale minima et une intégrale variée. Un procédé, tout semblable à celui qui a été employé par M. Kneser à propos de la stabilité de l'équilibre du fil pesant, permet de se passer des inégalités employées dans les différentes démonstrations directes données jusqu'ici. Malheureusement, cette méthode n'est plus applicable aux intégrales multiples, pour lesquelles, au surplus, la question est toujours beaucoup plus délicate.

Je me contenterai de mentionner ces différents points, qui seront traités avec plus de détails dans un Ouvrage ultérieur.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 2 FÉVRIER 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Laisant : *Sur un dispositif propre à tracer une ellipse.*

M. Raffy : *Sur les surfaces isothermiques qui ont même représentation sphérique que les surfaces du second degré.*

SÉANCE DU 16 FÉVRIER 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Élections :

M. l'abbé Fouët, présenté par MM. Borel et Désiré André, est élu à l'unanimité.

Communications :

M. Painlevé : *Sur le frottement.*

M. Lecornu : *Observations sur la précédente Communication.*

M. Hadamard : *Sur quelques questions de calcul des variations.*

M. Bioche adresse une *Note sur les permutations polyédriques.*

M. de Sparre adresse une *Note au sujet des mouvements à la surface de la Terre.*

SÉANCE DU 2 MARS 1905.

PRÉSIDENCE DE M. HADAMARD.

Communications :

M. Raffy : *Détermination des réseaux sphériques isothermes qui représentent les lignes de courbure d'une double infinité de surfaces isothermiques.*

M. M. Weill : *Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux.*

SÉANCE DU 16 MARS 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Fouché : *Sur la déviation des graves et les champs de force.*

M. Raffy : *Sur le problème général de la détermination des surfaces isothermiques.*

MM. Borel et Servant présentent quelques observations à propos de cette Communication.

M. Borel : *Remarques sur certaines questions de probabilité.*

M. de Sparre adresse une *Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre.*

M. Maillet adresse un Mémoire intitulé : *Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; applications à un système hydraulique de n réservoirs.*

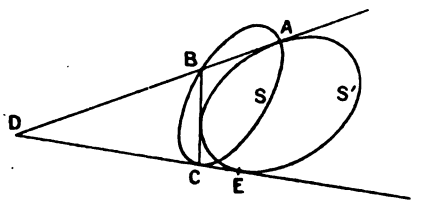
MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS IRRÉDUCTIBLES DU CINQUIÈME DEGRÉ, RÉSOLUBLES PAR RADICAUX;

Par M. Mathieu Weill.

Soient (*fig.* 1) une conique S′, trois tangentes DCE, DBA, BC, et une autre conique S passant par A, B, C, et touchant DE au

Fig. 1.



point C. Le pentagone ABCCB a ses sommets sur la conique S et ses côtés tangents à la conique S′; dès lors, il existe une infinité de pentagones inscrits dans S et circonscrits à S′.

On aura pour S′ l'équation

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0,$$

et, pour S, l'équation

$$(\alpha + 2\lambda\gamma)^2 + \beta(2\lambda^2\gamma + \mu\alpha) = 0$$

(BC ayant pour équation $\lambda^2\beta + 2\lambda\gamma + \alpha = 0$). Un point de la conique S est défini par

$$\alpha = 2\lambda\frac{t - \lambda^2}{\mu - t}\gamma,$$

$$\beta = \frac{-2\lambda}{t}\frac{\mu - \lambda^2}{\mu - t}\gamma.$$

La droite qui joint deux points a pour équation

$$\alpha[\mu - (t + t')] - \beta tt' - 2\lambda\gamma(t + t' - \lambda^2) = 0.$$

Cette droite sera tangente à S′, dont un point est défini par

$$\alpha = \lambda\theta,$$

$$\beta = \frac{\lambda}{\theta},$$

si l'équation

$$\theta^2[\mu - (t + t')] - tt' - 2\lambda\theta(t + t' - \lambda^2) = 0$$

a ses racines égales, ce qui donne

$$t^2(\lambda^2 - t') + t[2\lambda^2(t' - \lambda^2) - t'^2 + \mu t'] + \lambda^2(t' - \lambda^2)^2 = 0.$$

Considérons un pentagone inscrit dans la conique S et circonscrit à la conique S′, et soient $t_1\, t_2\, t_3\, t_4\, t_5$ les valeurs correspondantes du paramètre t. On aura

$$(1) \qquad \begin{cases} t_2 + t_5 = \dfrac{2\lambda^2(t_1 - \lambda^2) - t_1^2 + \mu t_1}{t_1 - \lambda^2}, \\ t_2 t_5 = \lambda^2(\lambda^2 - t_1). \end{cases}$$

Transportons ces valeurs dans l'équation de la droite qui joint les points correspondant à t_2 et t_5, nous aurons t_1 au second degré, nous en déduirons, immédiatement, l'équation de l'enveloppe des droites qui joignent de deux en deux les sommets du pentagone

$$(\alpha + 2\lambda\gamma)^2 + \beta(2\lambda^2\gamma + \mu\alpha) + (\mu - \lambda^2)(\gamma^2 - \alpha\beta) = 0.$$

Cette conique passe par les points communs aux deux premières, résultat bien connu.

D'autre part, en éliminant t_1 entre les relations (1), nous aurons, entre t_2 et t_5, la relation

$$\lambda^2(t_2t_5)(t_2+t_5)+\mu\lambda^6-\lambda^8-\mu\lambda^2t_2t_5-t_2^2t_5^2=0.$$

Cette même relation existe évidemment, entre t_1 et t_3, et aussi entre t_1 et t_4; on a donc

$$t_3+t_4=\lambda^2\frac{\mu-t_1}{\lambda^2-t_1},$$

$$t_3t_4=\lambda^6\frac{\mu-\lambda^2}{t_1(\lambda^2-t_1)}.$$

Désignons par θ la somme des produits 2 à 2 des 5 quantités t_1 t_2, t_3, t_4, t_5, c'est-à-dire la quantité

$$(t_2+t_3+t_4+t_5)t_1+t_3t_4+t_2t_5+(t_3+t_4)(t_2+t_5),$$

on aura donc

$$\theta=\frac{f(t_1)}{\varphi(t_1)}$$

ou

$$\theta\varphi(t_1)-f(t_1)=0,$$

relation où t_1 pourra être remplacé par chacune des valeurs t_2, t_3, t_4, t_5; on obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned}t^5-t^4(2\lambda^2+\mu)+\theta t^3-\lambda^2t^2(2\theta-\mu\lambda^2-\mu^2-3\lambda^4)\\ -\lambda^4t(2\lambda^4+\mu\lambda^2-\theta)+\lambda^8(\lambda^2-\mu)=0.\end{aligned}$$

Cette équation donnera, par la variation de θ, les 5 valeurs de t qui définissent le pentagone. Or, 2 quelconques de ces valeurs étant données, les autres en sont des fonctions rationnelles, comme le montre l'analyse précédente, c'est donc une équation de Galois, c'est à-dire que les 5 racines s'expriment par des radicaux portant sur des fonctions rationnelles des 3 paramètres θ, μ, λ^2. On a donc le théorème suivant :

L'équation

$$\begin{aligned}t^5-t^4(2a+b)+ct^3-at^2(2c-ab-b^2-3a^2)\\ -a^2t(2a^2+ab-c)+a^4(a-b)=0,\end{aligned}$$

dans laquelle a, b, c sont 3 quantités quelconques, est résoluble par radicaux.

Soient t_1 et t_2 deux des racines, les autres auront pour valeurs

$$t_3 = \frac{a(a - t_2)}{t_1},$$

$$t_4 = a^2 \frac{t_1 + t_2 - a}{t_2},$$

$$t_5 = \frac{a(a - t_1)}{t_2}.$$

On peut employer une autre méthode. Considérons deux coniques ayant pour équations

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$
$$Ax^2 + By^2 - z^2 = 0.$$

Un point de la première est défini par les équations

$$x = z\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = z\frac{2t}{1 + t^2},$$

et la droite qui joint 2 points a pour équation

$$x(1 - tt') + y(t + t') - z(1 + tt') = 0.$$

En exprimant que cette droite touche la seconde conique, on trouve facilement

$$\frac{(t + t')^2}{B} + \frac{(1 - tt')^2}{A} - (1 + tt')^2 = 0,$$

ou bien

$$t^2(1 + \lambda t'^2) + 2\mu tt' + t'^2 + \lambda = 0,$$
$$\left(\lambda = \frac{B - AB}{A}, \qquad \mu = \frac{A - B - AB}{A}\right).$$

Considérons un pentagone inscrit dans la première conique et circonscrit à la seconde, et soient t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 les paramètres qui correspondent aux sommets. On aura

$$t_2 + t_5 = \frac{-2\mu t_1}{+\lambda t_1^2}, \qquad t_2 t_5 = \frac{\lambda + t_1^2}{1 + \lambda t_1^2}.$$

Il en résulte entre t_2 et t_5 une relation de la forme

$$t^2(1+\lambda_1 t'^2)+2\mu_1 tt'+t'^2+\lambda=0,$$

avec

$$\lambda_1=\frac{4\lambda\mu^2}{(\lambda^2-1)^2};\qquad \mu_1=1-\frac{2\mu^2(\lambda^2+1)}{(\lambda^2-1)^2}.$$

On aura donc

$$t_3+t_4=\frac{-2\mu_1 t_1}{1+\lambda_1 t_1^2},\qquad t_3 t_4=\frac{\lambda_1+t_1^2}{1+\lambda_1 t_1^2}.$$

Appelons θ le produit t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, nous aurons

$$\theta=t_1\frac{\lambda+t_1^2}{1+\lambda t_1^2}\,\frac{\lambda_1+t_1^2}{1+\lambda_1 t_1^2}.$$

Donc l'équation

$$t(\lambda+t^2)(\lambda_1+t^2)-\theta(1+\lambda t^2)(1+\lambda_1 t^2)=0$$

aura pour racines les 5 valeurs de t; cette équation développée est

$$t^5-\theta\lambda\lambda_1 t^5+t^3(\lambda+\lambda_1)-\theta(\lambda+\lambda_1)t^2+\lambda\lambda_1 t-\theta=0.$$

Les paramètres λ et λ_1 sont liés par une relation qu'il faut trouver.

Or, si nous joignons t_1 à t_3, puis t_3 à t_5, la droite $t_1 t_5$ sera telle que l'on aura entre t_1 et t_5 la relation

$$t^2(1+\lambda_2 t'^2)+2\mu_2 tt'+t'^2+\lambda_2=0,$$

avec

$$\lambda_2=\frac{4\lambda_1\mu_1^2}{(\lambda_1^2-1)^2},\qquad \mu_2=1-\frac{2\mu_1^2(\lambda_1^2+1)}{(\lambda_1^2-1)^2}.$$

On aura, si le polygone se ferme,

$$\lambda_2=\lambda,\qquad \mu_2=\mu.$$

Exprimant ces conditions, on trouve

$$16\mu^2[(\lambda^2-1)^2-2\mu^2(\lambda^2+1)]^2(\lambda^2-1)^2=[16\lambda^2\mu^4-(\lambda^2-1)^4]^2,$$

$$1-\mu=\frac{[(\lambda^2-1)^2-2\mu^2(\lambda^2+1)]^2[(\lambda^2-1)^4+16\lambda^2\mu^4]}{[16\lambda^2\mu^4-(\lambda^2-1)^4]^2 8\mu^2(\lambda^2-1)^2}.$$

La première donne

$$4\mu(\lambda^2-1)[(\lambda^2-1)^2-2\mu^2(\lambda^2+1)]\pm[16\lambda^2\mu^4-(\lambda^2-1)^4]=0,$$

et la seconde, combinée avec la première, donne

$$8\mu^2(1-\mu)(\lambda^2-1)^2-[(\lambda^2-1)^4+16\lambda^2\mu^4]=0.$$

On voit facilement que, dans la première, il faut prendre le signe $+$.

En posant $\lambda^2-1=z$, les 2 relations deviennent

$$(z-2\mu)[-z^3+2\mu z^2+(4\mu^2-8\mu^3)z-8\mu^3]=0,$$
$$(z+2\mu)(-z^3+2\mu z^2+\ldots)=0.$$

La relation cherchée est donc, en posant $2\mu=t$,

$$z^3-tz^2+(t^3-t^2)z+t^3=0.$$

Elle donne, sous une forme simple, la condition entre A et B pour qu'il existe un pentagone inscrit dans la première conique et circonscrit à la seconde; elle peut s'écrire

$$(\lambda^2-1)^3-2\mu(\lambda^2-1)^2+(8\mu^3-4\mu^2)(\lambda^2-1)+8\mu^3=0,$$

elle permet d'exprimer μ en fonction de λ par des radicaux, et par suite, λ_1 en fonction de λ par des radicaux, donc l'équation du 5e degré envisagée plus haut est soluble par radicaux portant sur des fonctions rationnelles des deux paramètres indépendants λ et θ. On trouve, d'ailleurs, entre λ et λ_1, la relation

$$(\lambda\lambda_1-1)^2\lambda\lambda_1-(\lambda-\lambda_1)^2=0.$$

Posons

$$\lambda\lambda_1=a,\qquad \lambda+\lambda_1=b,$$

il vient

$$b=\sqrt{a^3-2a^2+5a},$$

on a donc l'énoncé suivant :

L'équation

$$t^5-act^4+(t^3-ct^2)\sqrt{a^3-2a^2+5a}+ta-c=0,$$

où a et c sont deux paramètres indépendants, est soluble par radicaux portant sur des fonctions rationnelles de a et c.

SUR LES PERMUTATIONS POLYÉDRIQUES;

Par M. Ch. Biche.

1. Les permutations ordinaires et les permutations circulaires ne sont autre chose que les dispositions qu'on peut réaliser avec n objets placés en ligne droite ou en cercle. Il semble assez naturel de considérer d'autres dispositions, telles que les différentes façons d'affecter n lettres aux n sommets d'un polyèdre. Ce sont ces dernières dispositions que j'appellerai *permutations polyédriques*. Je me propose de calculer leur nombre.

Pour préciser le problème j'en donnerai l'énoncé suivant :

On considère n lettres, et des polyèdres égaux ayant n sommets. On affecte à chaque sommet d'un polyèdre une des n lettres; combien peut-on obtenir de dispositions de ces lettres, deux dispositions étant les mêmes si l'on peut faire coïncider les polyèdres correspondants de façon que les sommets qui coïncident soient affectés de la même lettre?

2. Supposons toutes les dispositions réalisées, chacune ne l'étant qu'une seule fois; soit X leur nombre, il leur correspondra autant de polyèdres que je désignerai par

$$\Pi_1, \quad \Pi_2, \quad \ldots \quad \Pi_X.$$

J'imagine un polyèdre Π_0, égal aux polyèdres précédents et sur lequel je numérote les sommets de 1 à n, d'une façon d'ailleurs arbitraire. Si je fais coïncider Π_0 avec un des polyèdres considérés, Π_i par exemple, j'obtiens une permutation de n lettres en lisant sur Π_i les lettres dans l'ordre des numéros qui leur correspondent sur Π_0.

A toute permutation des n lettres correspond un polyèdre Π_i; qui se déduit de Π_0 en remplaçant les numéros correspondant aux sommets de Π_0 par les lettres de même rang de la permutation donnée; et l'on n'a qu'un polyèdre correspondant à une permutation donnée, puisqu'on suppose les permutations polyédriques distinctes.

Mais à un polyèdre Π_i il correspond autant de permutations des n lettres qu'il y a de façons de faire coïncider Π_0 avec Π_i; soit μ le nombre de ces *modes de coïncidence;* on voit qu'à toute permutation polyédrique correspondent μ permutations ordinaires. On a donc

$$X = \frac{n!}{\mu}.$$

3. En particulier, si les polyèdres Π sont réguliers et si p est le nombre des arêtes de chaque angle solide, on voit facilement que

$$\mu = np,$$

on a alors

$$X = \frac{(n-1)!}{p};$$

si les polyèdres Π sont des pyramides régulières, la base ayant $n-1$ sommets, on voit facilement que si $n > 4$ on a

$$\mu = (n-1),$$

et l'on a

$$X = \frac{n!}{(n-1)}.$$

On peut d'ailleurs facilement vérifier ces résultats ainsi que bien d'autres correspondant à des cas particuliers.

4. J'ai parlé, dans ce qui précède, de sommets d'un polyèdre pour plus de commodité; mais on peut considérer des systèmes de points tous situés dans un plan. Seulement, si l'on suppose toutes les figures situées dans le même plan, on pourra prendre pour μ soit le nombre des modes de coïncidence réalisables sans faire sortir les figures du plan commun, soit le nombre des modes de coïncidence réalisés quel que soit le déplacement. Le nombre X des permutations de trois lettres A, B, C, mises aux sommets d'un triangle isoscèle, serait alors de 6 dans le premier cas (où μ serait égal à 1), et de 3 dans le second (où μ serait égal à 2).

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. J. Clairin.

J'ai déterminé, dans un travail antérieur [1], toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, réductibles à une équation linéaire par une transformation de Bäcklund de seconde espèce, qui conserve les variables indépendantes, et qui fasse correspondre à chaque intégrale de l'équation considérée une seule intégrale de l'équation linéaire. Je me propose d'étudier les transformations (B_2) qui permettent de remplacer une équation aux dérivées partielles du second ordre par une équation linéaire, en faisant correspondre à chaque intégrale de l'équation donnée une infinité d'intégrales de l'équation linéaire, les variables indépendantes étant toujours conservées; je montrerai que, exception faite de deux cas particuliers, les seules transformations satisfaisant aux conditions énoncées sont les transformations indiquées par Moutard et M. Lucien Lévy.

Considérons une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre que nous pouvons toujours écrire, avec les notations ordinaires,

$$s = ap + bz, \tag{1}$$

a et b désignant deux fonctions des variables indépendantes x et y; la question proposée revient à celle-ci : *Trouver dans quels cas la fonction z' de x et y définie par l'égalité*

$$z' = f(x, y, z, p) \tag{2}$$

satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre quand on remplace z par une intégrale de l'équation (1).

---

[1] *Annales de la Faculté de Toulouse.* 1903.

On tire immédiatement de l'égalité précédente

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial z'}{\partial x} &= p' = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p},\\
\frac{\partial z'}{\partial y} &= q' = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + (ap+bz)\frac{\partial f}{\partial p},\\
\frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y} &= s' = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + p\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + (ap+bz)\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial p} + p\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p}\right)\\
&\quad + \left[\left(b+\frac{\partial a}{\partial x}\right)p + \frac{\partial b}{\partial x}z\right]\frac{\partial f}{\partial p} + q\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} + p\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\\
&\quad + r\left[a\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial p} + (ap+bz)\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\right] + qr\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p}.
\end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que f doit dépendre effectivement des deux variables z et p. Si f était indépendant de p, (2) définirait une transformation ponctuelle de l'équation (1); si f ne contenait pas z, z' satisferait à une équation déduite par un changement de fonction inconnue de l'une des équations obtenues en appliquant à (1) la transformation de Laplace.

Les deux premières équations (3) sont donc résolubles par rapport à q et à r; en portant les valeurs trouvées dans la dernière équation, il vient

$$s' = \mathrm{H}(x,y,z,p)p'q' + \mathrm{K}(x,y,z,p)p' + \mathrm{L}(x,y,z,p)q' + \mathrm{M}(x,y,z,p).$$

z' satisfera à une équation aux dérivées partielles du second ordre si H, K, L, M peuvent s'exprimer à l'aide de (2) en fonction de x, y, z' et cette équation sera nécessairement de la forme

$$s' = \mu(x,y,z')p'q' + \alpha(x,y,z')p' + \beta(x,y,z')q' + \gamma(x,y,z').$$

En prenant pour fonction inconnue $\int e^{\int -\mu\,dz'}\,dz'$ au lieu de z', on revient au cas où μ est nul : supposons cette transformation effectuée. $\mathrm{H}(x,y,z,p)$ s'annulant en même temps que $\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial p}$, on devra avoir

$$z' = f(x,y,z,p) = \varphi(x,y,z) + \psi(x,y,p).$$

$\mathrm{L}(x,y,z,p)$ sera une fonction de x, y, z' seulement si le déterminant fonctionnel $\frac{\mathrm{D}(\mathrm{L},f)}{\mathrm{D}}$ est nul; remplaçons L par sa valeur

$\dfrac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}+p\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}$, cette condition s'écrit :

$$(4)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}+p\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}\right)-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

Donnons à z une valeur fixe; on tire de là

$$\frac{\partial\psi}{\partial p}=\frac{m(x,y)}{p+\omega(x,y)}$$

et

$$\psi(x,y,p)=m(x,y)\operatorname{Log}[p+\omega(x,y)]\quad{}^{(1)},$$

à moins que, dans le déterminant (4), le coefficient de p ne soit nul ou que ce déterminant ne s'annule identiquement quelle que soit ψ. Examinons ces deux dernières hypothèses : le déterminant ne contient pas de terme dépendant de p si l'on a

$$(5)\qquad \varphi(x,y,z)=v(x,y)e^{u(x,y)z}+w(x,y)\qquad (u,v\neq 0),$$

ou si φ est une fonction linéaire de z. Il ne peut arriver que φ ait la forme (5); en substituant dans le déterminant écrit plus haut, on verrait que, dans ce cas, $\dfrac{\partial\psi}{\partial p}$ dépendrait de z. Le déterminant est identiquement nul si φ est une fonction linéaire de z.

Calculons le coefficient de p',

$$K(x,y,z,p)=a+\frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial p}+(ap+bz)\dfrac{\partial^2\psi}{\partial p^2}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}},$$

et écrivons encore que le déterminant $\dfrac{D(K,f)}{D(z,p)}$ s'annule identiquement. Nous trouvons

$$(6)\qquad b\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial p}+(ap+bz)\dfrac{\partial^2\psi}{\partial p^2}}{\dfrac{\partial\psi}{\partial p}}\right]=0.$$

---

(1) Il est évidemment inutile d'ajouter à l'expression trouvée pour ψ une fonction de x et y, puisqu'on peut toujours retrancher une pareille fonction de z'.

Nous négligeons d'abord le cas où le coefficient b serait nul.

En donnant à p une valeur fixe, on trouve

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{n(x, y)}{z + \xi(x, y)},$$

$$\varphi(x, y, z) = n(x, y)\,\mathrm{Log}[z + \xi(x, y)],$$

si z figure dans l'équation (6). Abstraction faite du cas où ψ est une fonction linéaire et où, par conséquent, le premier membre de (6) s'annule identiquement, z ne figure pas dans cette équation si l'on a

$$\psi(x, y, p) = v_0(x, y)e^{u_0(x, y)p} + w_0(x, y) \qquad (u_0, v_0 \neq 0);$$

en remplaçant ψ par cette fonction, il vient pour $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ une expression contenant p, ce qui est impossible.

En résumé, il n'y a que deux cas à considérer : φ et ψ sont respectivement égales à

$$n(x, y)\,\mathrm{Log}[z + \xi(x, y)], \qquad m(x, y)\,\mathrm{Log}[p + \omega(x, y)],$$

ou contiennent linéairement les quantités z et p.

Considérons d'abord le premier cas : portons dans l'équation (4) les expressions que nous venons de trouver pour φ et ψ; il reste, après réductions,

$$m\left(p + \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) + n(p + \omega) = 0.$$

Les fonctions m et n ne diffèrent donc que par le signe, en prenant $\frac{z'}{m(x, y)}$ pour nouvelle fonction inconnue, on voit que l'on peut supposer m égale à 1 et n égale à -1. L'équation précédente donne, en outre,

$$\omega = \frac{\partial\xi}{\partial x}.$$

Remplaçons dans l'équation linéaire (1) z par $z - \xi(x, y)$, elle devient

$$s + ap + bz + \sigma(x, y) = 0,$$

dans cette dernière équation remplaçons z par e^{z_1}, nous trouvons

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y} + a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b + \sigma e^{-z_1} = 0,$$

l'équation qui définit la transformation étant

$$z' = \log\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right).$$

D'après la forme de l'équation (7), $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et par conséquent z' ne satisferont à des équations aux dérivées partielles du second ordre que si $\sigma(x, y)$ est nulle [1], c'est-à-dire si ξ est une intégrale de l'équation (1). Il en résulte que l'on a

$$z' = \operatorname{Log}\left[\frac{p + \frac{\partial \xi}{\partial x}}{z + \xi(x, y)}\right],$$

ou simplement

$$z' = \operatorname{Log}\left(\frac{p}{z}\right),$$

si l'on remplace z par $z - \xi(x, y)$, ce qui ne change pas l'équation (1). On trouve donc ainsi les transformations indiquées par Moutard.

Passons au cas où φ et ψ dépendent linéairement de z et de p, il existe toujours des fonctions θ, η, ζ de x et y telles que l'on puisse écrire

$$z' = \theta(x, y)\frac{\partial\left[\frac{z}{\eta(x, y)}\right]}{\partial x} + \zeta(x, y);$$

tout revient à chercher si $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\eta}\right)$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre. $\frac{z}{\eta} = z_1$ est une intégrale de

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + a\right)\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y} + \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}a + b\right)z_1 = 0.$$

$\frac{\partial z_1}{\partial x}$ satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre si, dans l'équation qui vient d'être écrite, le rapport des coefficients de z_1 et de $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ ne dépend que de y [2]; écrivons cette con-

---

[1] Goursat, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 244.

[2] Goursat, *loc. cit.*

dition

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + b\eta_1 = Y\frac{\partial \eta_1}{\partial x}.$$

Remplaçons $\eta(x, y)$ par $\eta_1(x, y)\int Y\, dy$; on aperçoit immédiatement que η_1 est une intégrale de l'équation linéaire donnée; la transformation considérée est une transformation de M. Lucien Lévy, puisqu'elle équivaut à la transformation

$$z' = \eta_1 p - \frac{\partial \eta_1}{\partial x} z.$$

Lorsque b est nul, nous écrirons l'équation linéaire sous la forme suivante,

$$s = \frac{1}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial y} p, \tag{8}$$

a_0 désignant une fonction de x et y. De la condition (6) on déduit que l'on a

$$\psi(x, y, p) = m(x, y)\Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right) + n(x, y) \quad (^1),$$

ou simplement

$$\psi(x, y, p) = \Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right),$$

si l'on effectue un changement d'inconnue dans l'équation transformée, comme nous avons fait plusieurs fois. Nous supposons d'abord que φ ne contient pas linéairement z, l'équation (4) nous permet de déterminer la forme de la fonction Ψ,

$$\Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right) = \operatorname{Log}\left[\frac{p}{a_0} + X'(x)\right],$$

en négligeant toujours, ce qui est permis, un facteur indépendant de p et un terme additif également indépendant de p. L'équation (4) fournit alors le système

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z\, \partial x} &= a_0 X'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \rho(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \tau(x, y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

(1) Il est bien évident que les fonctions m et n n'ont aucune relation avec celles qui ont été représentées plus haut par les mêmes lettres. Il en est de même pour les fonctions désignées plus loin par η et ω.

qui est intégrable à condition que l'on ait

$$\rho = a_0(x, y)\,X'(x)\,Y(y), \qquad \tau = Y(y).$$

En écrivant que $\frac{D(M, f)}{D(z, p)}$ est nul et en tenant compte de (9), on arrive à

$$\frac{\partial}{\partial y}(a_0 Y) = 0, \tag{10}$$

ce qui signifie que Y est nulle, à moins que l'équation (8) n'ait ses deux invariants nuls.

Si Y est nulle, la deuxième équation (9) montre que l'on peut écrire

$$\varphi(x, y, z) = -\operatorname{Log}[z + \omega(x, y)];$$

en recommençant les raisonnements faits plus haut, on montre que l'on obtient une transformation de Moutard.

Lorsque l'équation (8) a ses deux invariants nuls, il est permis de supposer a_0 égale à 1 : de (10) on déduit que Y est une constante que nous pouvons remplacer par l'unité. Le système (9) donne alors

$$\varphi(x, y, z) = -\operatorname{Log}(e^{z+X} - 1);$$

finalement, en écrivant partout $z - X$ au lieu de z, on trouve

$$z' = \operatorname{Log}\left(\frac{p}{e^z - 1}\right);$$

cette transformation permet de passer de l'équation

$$s = 0 \quad \text{à} \quad s' + q' e^{z'} = 0.$$

Pour terminer, il reste à examiner le cas où φ est linéaire en z, l'équation donnée ayant toujours la forme (8). On a alors

$$z' = \eta(x, y)\,z + \Psi\left(x, \frac{p}{a_0}\right), \tag{11}$$

et l'on en tire

$$q' = \frac{\partial \eta}{\partial y} z + \eta q, \qquad s' = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} z + \frac{\partial \eta}{\partial y} p + \frac{\partial \eta}{\partial x} q + \frac{\eta}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial y} p,$$

puis, en remplaçant q par sa valeur,

$$s' - \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} q' = \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\eta}{a_0}\frac{\partial a_0}{\partial y}\right) p + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{\eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) z. \tag{12}$$

Imaginons que, dans le second membre de cette dernière équation, les coefficients de z et p ne soient pas nuls; si l'on exprime que ce second membre ne dépend que de x, y, z', en vertu de (11) on trouve que Ψ est une fonction linéaire de p et que l'on a une transformation de M. Lucien Lévy. En écrivant, au contraire, que le second membre de (12) est identiquement nul, on trouve que a_0 satisfait à

$$a_0 \frac{\partial^2 a_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial a_0}{\partial x} \frac{\partial a_0}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (8) a ses deux invariants nuls, ou encore que l'on peut supposer a_0 égale à 1. η est alors une fonction de la seule variable x et un changement simple d'inconnue dans l'équation transformée permet de remplacer (11) par

$$z' = z + g(x, p);$$

les deux équations qui se correspondent sont

$$s = 0, \qquad s' = 0.$$

En rapprochant les résultats qui viennent d'être établis de ceux que j'ai démontrés dans mon travail déjà cité des *Annales de la Faculté de Toulouse*, on voit que l'on connaît toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre, qu'on peut remplacer par une équation linéaire à l'aide d'une transformation de Bäcklund de deuxième espèce, tout en conservant les variables indépendantes. Si l'on supprime cette dernière condition, le problème est beaucoup plus compliqué; j'ai déterminé quelques équations qui sont déduites d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre par une transformation (B_2) [1], je me bornerai à indiquer ici qu'en appliquant une transformation (B_1) aux équations que j'ai indiquées dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, on obtient de nouvelles équations jouissant de la propriété énoncée.

---

[1] *Comptes rendus*, 27 juin 1904.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES;

Par M. Arnaud Denjoy.

Soit f une fonction définie en chaque point d'un ensemble parfait quelconque P. On sait ce que l'on entend par maximum et minimum de la fonction f en un point de cet ensemble et relativement à cet ensemble. Désignons par A et I ces deux fonctions qui sont définies en chaque point de P. La fonction A est semi-continue supérieurement, la fonction I semi-continue inférieurement.

La fonction A, qui est à elle-même son propre maximum, possède un minimum. Je le désigne par A'. La fonction semi-continue inférieurement A' possède un maximum. Je le désigne par A''. Je désigne de même le minimum de A'' par A''', et ainsi de suite. Je désigne d'une façon entièrement analogue les fonctions I', I'', I''', ..., qui se déduisent de I. I' est le maximum de la fonction semi-continue inférieurement I. I'' est le minimum de la fonction semi-continue supérieurement I'. I''' est le maximum de I'', etc.

Je démontre dès le début de cette Note que les fonctions de rang impair A', A''', ... coïncident entre elles, et aussi I', I''', ..., et qu'il en est de même des fonctions de rang pair A'', A^{IV}, ..., d'une part, et I'', I^{IV}, ..., d'autre part. Ce fait étant acquis :

1° Je donne les propriétés-définitions, caractéristiques des quatre fonctions A', A'', I', I'', et qui les relient directement à f;

2° Je cherche si, par leurs propriétés, ces fonctions peuvent servir à caractériser une fonction f à laquelle elles appartiennent. Je trouve effectivement une relation, savoir $A' = I''$, $A'' = I'$, vérifiée sur tout ensemble parfait qui caractérise les fonctions limites de fonctions continues, ou de classe 1, suivant la terminologie de M. Baire;

3° J'ai cherché si, parmi ces fonctions, certaines conservent leurs propriétés à la limite; autrement dit, f_n étant une fonction tendant vers une fonction f, j'ai cherché si les fonctions a'_n, a''_n, i'_n, i''_n, relatives à f_n, tendent vers les fonctions A', A'', I', I'',

relatives à la fonction f limite de f_n. Il n'en est rien, comme il est bien aisé de s'en convaincre par des exemples immédiats. Mais j'ai pu trouver des inégalités reliant les quantités A', A'', I', I'', et les limites a', a'', i', i'' des fonctions a'_n, a''_n, i'_n, i''_n dans le cas où ces limites existent. J'ai, à ce propos, énoncé un théorème général sur la façon dont s'opère la convergence d'une fonction tendant vers une fonction limite.

I.

En vue de simplifier l'exposition, je supposerai le plus souvent que l'ensemble parfait P, sur lequel sont définies les fonctions, est le continu linéaire. Mais, toutes les définitions et tous les résultats subsistent dans le cas où l'ensemble parfait P est quelconque. Il suffit de remplacer le mot *point* par *point de* P, le mot *intervalle* par *intervalle contenant des points de* P, les mots *point intérieur à un intervalle* par *point de* P *intérieur à un intervalle,* et cela dans les définitions, énoncés et démonstrations. On se rendra très aisément compte que, sous leur nouvelle forme, ceux-ci sont encore valables.

Soit donc f une fonction définie sur le continu linéaire P. Rappelons les propriétés caractéristiques du maximum A et du minimum I de f.

H étant un point quelconque de P et étant donné un nombre positif ε quelconque :

A. — 1° Je puis trouver un intervalle CD entourant le point considéré H et en chaque point duquel on a

$$f < A(\mathrm{H}) + \varepsilon;$$

2° Quelque petit que soit CD entourant H, il y a à son intérieur un point (pouvant coïncider avec H) où $f > A(\mathrm{H}) - \varepsilon$.

L'ensemble de ces deux propriétés montre que le nombre $A(\mathrm{H})$ est le plus petit jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°. Ces propriétés sont donc caractéristiques de $A(\mathrm{H})$, c'est-à-dire que tout nombre jouissant de toutes les deux à la fois coïncide forcément avec A.

Pour I, définitions analogues :

I. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD entourant H, en chaque point duquel $f > I(H) - \varepsilon$;

2° Quelque petit que soit CD contenant H à son intérieur, il existe dans CD un point où $f < I(H) + \varepsilon$.

$I(H)$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°. L'ensemble de ces propriétés caractérise donc I.

Ceci posé, je vais démontrer les égalités

$$A' = A^{\text{IV}} = A_3 = \ldots = A_{2n-1},$$
$$A^{\text{V}} = A^{\text{VI}} = A_4 = \ldots = A_{2n-2}$$

et les inégalités analogues relatives à I', I^{V}, I^{VI}, ... Remarquons que les premières se ramènent à l'égalité $A' = A^{\text{IV}}$. Car la fonction qui joue, par rapport à A^{IV}, le rôle que A^{IV} joue par rapport à A', est A_3. Si donc A' et A^{IV} sont identiques, $A^{\text{IV}} = A_3$, et ainsi de suite, pour les fonctions d'indice impair. Mais, si toutes les fonctions d'indice impair sont identiques, leurs maxima sont aussi identiques. Or, ces maxima ne sont autres que A^{V}, A^{VI}, ... Donc, les deux suites d'égalités écrites se ramènent à $A' = A^{\text{IV}}$. De même les égalités relatives aux I', I^{V}, I^{VI}, ... se ramènent à $I' = I^{\text{IV}}$. Pour démontrer ces deux dernières, j'aurai besoin du lemme suivant :

Lemme. — *Si $f \geqq g$, le maximum et le minimum de f en chaque point sont respectivement supérieurs ou égaux au maximum et au minimum de g au même point.*

Soient A_1 le maximum et I_1 le minimum de f; A_2 et I_2 le maximum et le minimum de g. Je veux montrer que $f \geqq g$ entraîne $A_1 \geqq A_2$, $I_1 \geqq I_2$. Soit, en effet, H un point quelconque de P. Quel que soit le nombre positif ε donné : Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur (A, 1°), en tout point duquel on a

$$f < A_1(H) + \varepsilon,$$

et, par suite,

$$g < A_1(H) + \varepsilon.$$

Donc,

$$A_2 \leqq A_1.$$

En second lieu, quel que soit CD contenant H à son intérieur, il est possible d'y trouver un point où (I, 2°)

$$f < I_1(\mathrm{H}) + \varepsilon,$$

et, par suite,

$$g < I_1(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

Donc,

$$I_2 \leqq I_1.$$

En résumé, les inégalités $f > g$ ou $f \geqq g$ entraînent les suivantes :

$$A_1 \geqq A_2, \qquad I_1 \geqq I_2.$$

Lorsque dans une inégalité ou dans une égalité nous remplacerons les deux membres par leurs maxima ou leurs minima respectifs, nous dirons que nous *délimitons* les deux membres de la relation, supérieurement dans le premier cas, inférieurement dans le second.

Ceci posé, démontrons l'égalité

$$A' = A'''.$$

Pour cela, je remarque que j'ai $A \geqq A'$, puisque A' est le minimum de A, et $A'' \geqq A'$, puisque A'' est le maximum de A'. Délimitons la première inégalité supérieurement,

$$A \geqq A''.$$

Donc,

$$A \geqq A'' \geqq A'.$$

Délimitons inférieurement les trois termes de cette double relation,

$$A' \geqq A''' \geqq A'.$$

Donc,

$$A' = A'''. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On démontrerait pareillement que

$$I' = I'''.$$

Ainsi. la fonction A' semi-continue inférieurement jouit de la

propriété d'être le minimum de son maximum A''. De même, I' est une fonction semi-continue supérieurement qui est le maximum de son minimum I''.

On peut se demander dans quel ordre de grandeur sont rangées les six fonctions A, A', A'', I, I', I''.

On a d'abord

$$A \geqq A'' \geqq A'$$

et, de même,

$$I' \geqq I'' \geqq I.$$

De $A \geqq I$ je déduis, en délimitant inférieurement,

$$A' \geqq I$$

et, en délimitant supérieurement,

$$A'' \geqq I'.$$

Donc

$$A \geqq A'' \geqq I'.$$

On a donc l'ordre suivant, par raison de symétrie :

$$A \geqq A'' \geqq \begin{matrix} I' \\ A' \end{matrix} \geqq I'' \geqq I.$$

A, A'', I' sont semi-continues supérieurement, A', I'', I le sont inférieurement. Il est d'ailleurs très aisé de former des exemples où A' et I' sont dans un ordre de grandeur constant et quelconque, ou indifférent.

Remarquons encore que ces inégalités ont été déduites, seulement, de ce que A est semi-continue supérieurement, I semi-continue inférieurement avec $A \geqq I$, et non pas de ce que A et I sont l'un le maximum, l'autre le minimum d'une même fonction.

Donnons des définitions caractéristiques de A', A'', I', I''. Soit H un point quelconque de P. Quel que soit le nombre positif ε donné :

A'. — A' étant le minimum de A, il est possible (I, 1°) d'entourer H d'un intervalle CD en chaque point M duquel $A(\mathrm{M}) > A'(\mathrm{H}) - \frac{\varepsilon}{2}$. Autour de chaque point M de CD (A, 2°), je

peux construire un intervalle dans lequel il y a un point où $f > A(M) - \frac{\varepsilon}{2}$. En ajoutant ces inégalités, on voit que :

1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD dans lequel l'ensemble des points où $f > A'(H) - \varepsilon$ est partout dense.

Dans tout intervalle CD contenant H, je peux trouver (I, 2°) un point M (pouvant coïncider avec H) où $A(M) < A'(H) + \frac{\varepsilon}{2}$. Autour de M, je peux trouver (A, 1°) un intervalle en chaque point duquel $f < A(M) + \frac{\varepsilon}{2}$. Donc :

2° Dans tout intervalle CD contenant H existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f < A'(H) + \varepsilon$.

$A'(H)$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°. L'ensemble de ces propriétés est donc caractéristique de A'.

A''. — A'' est le maximum de A'. Donc je peux trouver un intervalle CD contenant H en chaque point M duquel j'ai

$$A'(M) < A''(H) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans tout intervalle contenant M existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f < A'(M) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, les intervalles en chaque point desquels j'ai $f < A''(H) + \varepsilon$ forment un ensemble partout dense dans CD. Donc :

1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H et tel que l'ensemble des points où $f > A''(H) + \varepsilon$ est non dense partout sur CD.

Dans tout intervalle CD contenant H, je peux trouver un point M où $A'(M) > A''(H) - \frac{\varepsilon}{2}$. Autour de M, je peux trouver un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f > A'(M) - \frac{\varepsilon}{2}$ est partout dense. Donc :

2° Dans tout intervalle CD contenant H, il existe un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f > A''(H) - \varepsilon$ est partout dense.

Le nombre $A''(\mathrm{H})$ est le plus petit jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°. Donc, ces propriétés caractérisent A''.

En essayant de définir de même A''' comme étant le minimum de A'', on tombe sur la définition donnée pour A'. On retrouve ainsi l'égalité

$$A' = A''' = \ldots.$$

Des définitions précédentes on déduit par analogie celles de I' et de I''.

I'. — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD dans lequel l'ensemble des points où $f < I'(\mathrm{H}) + \varepsilon$ est partout dense;

2° Dans tout intervalle CD contenant H, existe un intervalle en chaque point duquel j'ai $f > I'(\mathrm{H}) - \varepsilon$.

$I'(\mathrm{H})$ est le plus petit nombre jouissant de la propriété 1° et le plus grand jouissant de la propriété 2°.

I''. — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD, tel que l'ensemble des points où $f < I''(\mathrm{H}) - \varepsilon$ est non dense partout sur CD;

2° Dans tout intervalle CD contenant H, il existe un intervalle sur lequel l'ensemble des points où $f < I''(\mathrm{H}) + \varepsilon$ est partout dense.

$I''(\mathrm{H})$ est le plus grand nombre jouissant de la propriété 1° et le plus petit jouissant de la propriété 2°.

II.

Nous allons donner une application de ces définitions dans le théorème suivant :

Les fonctions de classe 1 sont caractérisées par la double égalité $A' = I''$ et $I' = A''$, vérifiée quel que soit l'ensemble parfait pris pour base.

Nous admettrons pour cela le théorème de M. Baire, à savoir que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f*

soit de classe 1 *est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait,* c'est-à-dire que $A - I$ *ait son minimum nul en tout point* ou, enfin, que *l'ensemble des points où* $A - I < \varepsilon$ *est partout dense* (et même peut être constitué par des intervalles partout denses).

Il nous suffit de montrer que $A' = I''$ par exemple. Car, si cette égalité est vérifiée, en la délimitant supérieurement on trouve

$$A'' = I'.$$

Mais, puisque dans la propriété que je veux démontrer f n'intervient que par la différence $A - I$, il convient de rattacher les fonctions A' et I'' respectivement à A et I. Afin d'avoir les définitions les plus avantageuses nous envisagerons successivement A' comme jouant, relativement à A, les rôles 1° de I, 2° de A'; puis I'' comme jouant, relativement à I, les rôles 1° de I'', 2° de A'.

On trouve de la sorte que :

H étant un point quelconque du continu linéaire P, et quel que soit le nombre positif ε donné :

A'. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur et en chaque point duquel on ait

$$A > A'(\mathrm{H}) - \varepsilon;$$

2° Quel que soit CD, il y a dans CD un intervalle où

$$A < A'(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

I''. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H à son intérieur et tel que l'ensemble des points où $I < I''(\mathrm{H}) - \varepsilon$ est non dense partout sur CD;

2° Dans tout intervalle CD contenant H il existe un intervalle en chaque point duquel $I < I''(\mathrm{H}) + \varepsilon$.

Ces définitions, comme les premières, s'appliquent à un ensemble parfait quelconque pris pour base. Nous allons démontrer que la condition $A' = I''$, vérifiée sur un ensemble parfait, caractérise une fonction ponctuellement discontinue sur cet ensemble parfait et, pour simplifier, nous prendrons pour base le continu.

Démontrons la proposition directe :

Par hypothèse, l'ensemble des points où $A - I < \varepsilon$ est partout dense.

Soit H un point quelconque. J'entoure H d'un intervalle CD (A', 1°), en chaque point duquel j'ai

$$A > A'(\mathrm{H}) - \varepsilon.$$

Dans CD je peux trouver $C_1 D_1$ (I'', 2°) où

$$I < I''(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

Dans $C_1 D_1$ je puis trouver un point M où $A(\mathrm{M}) < I(\mathrm{M}) + \varepsilon$. Donc l'inégalité $A'(\mathrm{H}) - \varepsilon < I''(\mathrm{H}) + \varepsilon$ est possible quel que soit ε. Or, $A' \geqq I''$. Donc

$$A'(\mathrm{H}) = I''(\mathrm{H}),$$

quel que soit H.

Réciproquement, supposons que $A' = I''$. Je vais montrer que, dans tout intervalle PQ, il est possible de trouver un point et même un intervalle où $A < \mathrm{I} + \varepsilon$.

En effet, je prends H intérieur à l'intervalle donné PQ. Il est possible (I'', 1°) de trouver un intervalle CD entourant H et dans lequel l'ensemble des points où $I < I''(\mathrm{H}) - \varepsilon$ est non dense. Je limite CD à sa partie comprise dans PQ.

Dans l'intervalle CD je peux trouver $C_1 D_1$ (A', 2°) où

$$A < A'(\mathrm{H}) + \varepsilon.$$

Dans $C_1 D_1$ je peux trouver $C_2 D_2$ (I'', 1°) où

$$I > I''(\mathrm{H}) - \varepsilon.$$

En chaque point de $C_2 D_2$, les deux inégalités sont vérifiées. Comme $A'(\mathrm{H}) = I''(\mathrm{H})$, en retranchant membre à membre, on voit qu'en tout point de $C_2 D_2$ on a

$$A < I + 2\varepsilon.$$

Donc, f est ponctuellement discontinue sur le continu. Donc, la condition $A' = I''$ ou $A'' = I'$, vérifiée sur tout ensemble parfait, caractérise les fonctions de classe 1.

Désignons par O la différence $A - I$. O est l'oscillation de f relativement à l'ensemble parfait considéré. Soit O′ le minimum de O et O″ le maximum de O′. Lorsque f est ponctuellement discontinue, O′ est nul et, dans ce cas, nous venons de voir que $A' - I''$ est également nul, ainsi que $A'' - I'$. Ceci n'est qu'un cas particulier des doubles inégalités

$$O'' \geqq \begin{matrix} A' - I'' \\ A'' - I' \end{matrix} \geqq O',$$

qui sont vraies quelle que soit f.

Pour les démontrer, je commencerai par définir A'' et I', puis O′ et O″ par les propriétés qui les rattachent à A et à I. Soit H un point quelconque du continu linéaire P. Étant donné un nombre positif ε quelconque :

A''. — 1° Il est possible d'entourer H d'un intervalle CD, tel que l'ensemble des points où $A > A''(H) + \varepsilon$ est non dense partout sur CD ;

2° Dans tout intervalle CD contenant H existe un intervalle en chaque point duquel $A > A''(H) - \varepsilon$.

I'. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD contenant H, en chaque point duquel $I < I'(H) + \varepsilon$;

2° Quel que soit CD entourant H, il y a dans CD un intervalle où $I > I'(H) - \varepsilon$.

O'. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD, contenant H à son intérieur, en chaque point duquel $A - I > O'(H) - \varepsilon$;

2° Quel que soit CD contenant H, il y a dans CD un intervalle où $A - I < O'(H) + \varepsilon$.

O''. — 1° Il est possible de trouver un intervalle CD, contenant H à son intérieur, tel que l'ensemble des points où

$$A - I > O''(H) + \varepsilon$$

est non dense partout sur CD ;

2° Dans tout intervalle CD contenant H à son intérieur existe un intervalle en chaque point duquel $A - I > O''(H) - \varepsilon$.

Pour obtenir les inégalités que j'ai en vue, j'associe chacune

des inégalités auxquelles satisfont O′ et O″ avec les inégalités concordantes relatives à A' et I'', A'' et I'.

Tout d'abord, je constate que (O′, 2°) et (O″, 2°) ne donnent lieu à aucune conclusion. Voici le schéma des raisonnements qui me donnent les inégalités cherchées. J'ai écrit dans une même colonne verticale les intervalles que j'utilise dans le raisonnement. Chacun est entièrement contenu à l'intérieur de celui qui est écrit immédiatement au-dessus. A côté du nom de l'intervalle se trouve la condition qui le détermine et, sur la même ligne, la relation qui est vérifiée en chaque point intérieur à l'intervalle considéré. De la sorte, toutes les relations sont simultanément vérifiées en chaque point de l'intervalle écrit à la ligne inférieure. Je déduis alors, du fait que les relations écrites peuvent être simultanément vérifiées, la relation cherchée :

CD	(O′, 1°)	$A - I > O'(H) - \varepsilon,$
C_1D_1	(A', 2°)	$A < A'(H) + \varepsilon,$
C_2D_2	(I'', 1°)	$I > I''(H) - \varepsilon,$

d'où

$$A'(H) - I''(H) \geqq O'(H);$$

CD	(O′, 1°)	$A - I > O'(H) - \varepsilon,$
C_1D_1	(I', 2°)	$I > I'(H) - \varepsilon,$
C_2D_2	(A'', 1°)	$A < A''(H) + \varepsilon,$

d'où

$$A''(H) - I'(H) \geqq O'(H);$$

CD	(A', 1° et O″, 1°)	$A > A'(H) - \varepsilon,$
C_1D_1	(I'', 2°)	$I < I''(H) + \varepsilon,$
C_2D_2	(O″, 1°)	$A - I < O''(H) + \varepsilon,$

d'où

$$A'(H) - I''(H) \leqq O''(H);$$

CD	(I', 1° et O″, 1°)	$I < I'(H) + \varepsilon,$
C_1D_1	(A'', 2°)	$A > A''(H) - \varepsilon,$
C_2D_2	(O″, 1°)	$A - I < O''(H) + \varepsilon,$

d'où

$$A''(H) - I'(H) \leqq O''(H)$$

ou, en résumé,

$$O'' \geqq \begin{matrix} A' - I'' \\ A'' - I' \end{matrix} \geqq O'.$$

Délimitons supérieurement et inférieurement ces deux relations, Les termes extrêmes deviennent égaux. Donc,

$$A' - I'', \quad A'' - I', \quad O'$$

ont le même maximum O'';

$$A - I, \quad A' - I'', \quad A'' - I'$$

ont le même minimum, savoir O'.

III.

Nous allons maintenant nous occuper du cas où les six fonctions A, A', A'', I, I', I'' sont attachées à une fonction dépendant d'un indice. Nous aurons, à ce sujet, besoin d'un théorème général que je vais démontrer, relatif à la convergence d'une fonction vers une fonction limite.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ une suite de fonctions définies sur un ensemble parfait quelconque que, pour simplifier, nous supposons être le continu linéaire AB. Supposons que f_n tende vers une limite f. Donnons-nous un nombre positif quelconque ε et un entier α. Désignons par $G(\alpha, \varepsilon)$ l'ensemble des points H tels que, quel que soit $n \geqq \alpha$, on ait toujours

$$|f_n(H) - f(H)| < \varepsilon.$$

Remarquons que, si

$$\alpha' > \alpha, \quad G(\alpha', \varepsilon) \geqq G(\alpha, \varepsilon);$$

si

$$\varepsilon' < \varepsilon, \quad G(\alpha, \varepsilon') \leqq G(\alpha, \varepsilon).$$

Je rappelle qu'avec M. Baire j'entendrai par *ensemble de première catégorie,* sur un ensemble parfait donné, un ensemble qui peut être considéré comme la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles, chacun non dense sur l'ensemble parfait considéré. Un ensemble qui n'est pas de première catégorie est dit *de seconde catégorie.*

Les deux propriétés fondamentales de ces divers ensembles sont les suivantes :

Une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est un ensemble de première catégorie.

Un ensemble parfait est de seconde catégorie par rapport à lui-même.

THÉORÈME I. — *Étant donné* ε, *il est possible de prendre* α *suffisamment grand pour que l'ensemble* $G(\alpha, \varepsilon)$ *soit de seconde catégorie sur* AB.

Car, s'il était de première catégorie quel que fût α, l'ensemble de tous les $G(\alpha, \varepsilon)$, pour toutes les valeurs de α, serait de première catégorie. Il y aurait donc des points de AB qui n'appartiendraient à aucun ensemble $G(\alpha, \varepsilon)$. En ces points, quel que fût α, il serait impossible que $|f_n - f| < \varepsilon$ pour toute valeur de n supérieure à α. Ceci est contradictoire avec l'hypothèse qu'en chaque point f_n tend vers f.

THÉORÈME II. — *Étant donné* ε, *l'ensemble* $Q(\varepsilon)$ *des points tels que, autour de l'un de ces points,* $G(\alpha, \varepsilon)$ *est de première catégorie, quel que soit* α, *est non dense partout sur* AB.

Car, si l'ensemble $Q(\varepsilon)$ était dense sur un segment CD intérieur à AB, l'ensemble $G(\alpha, \varepsilon)$ serait de première catégorie sur CD, et cela, quel que fût α. Or, étant donné le segment CD, il existe un nombre α, tel que $G(\alpha, \varepsilon)$ et tous les ensembles qui le suivent soient de deuxième catégorie sur CD. Le théorème est donc vrai.

Je me suis appuyé sur la proposition suivante :

Étant donné un ensemble G *et un intervalle* CD, *si* G *est de première catégorie dans un intervalle fini* λ *autour de chaque point d'un ensemble* Q *partout dense sur* CD, G *est de première catégorie sur* CD.

Cette proposition se ramène elle-même à la suivante :

Il est possible, dans les conditions précédentes, de couvrir CD, *sauf les points d'un ensemble non dense* P, *d'une infinité dénombrable des intervalles* λ, *de telle façon que tout point de* CD *n'appartenant pas à* P *soit intérieur à l'un au moins de ces intervalles.*

Car : 1° les points qui n'appartiennent à aucun intervalle λ forment un ensemble non dense P (et même fermé) sur λ; 2° considérons un intervalle EF contigu à cet ensemble fermé non dense. Soit E'F' un intervalle intérieur à EF. Par hypothèse, chaque point

de E'F', extrémités comprises, est intérieur à un intervalle λ. D'après un théorème connu de M. Borel, je peux couvrir E'F' avec un nombre fini d'intervalles λ. Je n'ai plus qu'à prolonger la suite des intervalles de chaque côté vers E et vers F. J'atteindrai chaque point intérieur à EF avec un nombre fini d'intervalles λ. Donc, je pourrai trouver une infinité dénombrable d'intervalles λ tels que tout point intérieur à EF soit intérieur à un au moins de ces intervalles.

Il y a une infinité dénombrable d'intervalles EF. Donc, il y a une infinité dénombrable d'intervalles λ, tels que tout point de CD soit intérieur à un de ces intervalles, sauf les points de l'ensemble P non dense, tels que E et F.

Revenons à l'ensemble G. G est de première catégorie dans chaque intervalle λ. Or, les points de G qui n'appartiennent pas à P sont compris dans une infinité dénombrable d'intervalles, dans chacun desquels G est de première catégorie. Ces premiers points forment donc un ensemble de première catégorie. Restent les points de G situés sur l'ensemble non dense P. Mais un ensemble de première catégorie, augmenté d'un ensemble non dense, reste de première catégorie. Donc, G est de première catégorie sur CD. La démonstration du théorème II se trouve ainsi complètement élucidée.

Du théorème II nous déduisons :

Théorème III. — *L'ensemble* Q *des points pour chacun desquels il est possible de trouver un nombre* ε, *tel que, quel que soit* α, *l'ensemble* $G(\alpha, \varepsilon)$ *est de première catégorie autour du point considéré, est lui-même de première catégorie.*

Soit $Q(\varepsilon)$ l'ensemble non dense correspondant à un nombre ε. Donnons-nous une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, tendant vers 0. L'ensemble des points communs à $Q(\varepsilon_1)$, $Q(\varepsilon_2)$, ...,

$Q(\varepsilon_n)$, ..., n'est autre que l'ensemble Q de l'énoncé. Comme $Q(\varepsilon_n)$ est non dense, Q est de première catégorie.

Le théorème auquel je viens d'aboutir me paraît intéressant par lui-même et c'est pourquoi j'ai cru devoir le démontrer. Mais, au point de vue de la question qui nous intéresse, les conditions imposées aux ensembles $G(\alpha, \varepsilon)$ et $Q(\varepsilon)$ sont plus restrictives qu'il n'est besoin. Les théorèmes démontrés le seront *a fortiori*, si je remplace les ensembles G et Q par les ensembles G' et Q' que je vais définir.

Désignons par $G'(\alpha, \varepsilon)$ l'ensemble des points H, tels que l'on ait $|f\alpha(H) - f(H)| < \varepsilon$. On a

$$G'(\alpha, \varepsilon) \geqq G(\alpha, \varepsilon).$$

L'énoncé du théorème I est renforcé. Celui du théorème II l'est aussi si l'on remplace dans l'énoncé G par G'. Supposons que dans cet énoncé on remplace aussi les mots *de première catégorie* par *qui ne soit pas partout dense sur un intervalle suffisamment petit entourant* H.

L'énoncé prend la forme suivante :

L'ensemble $Q'(\varepsilon)$ *total des points* H, *tels qu'autour de* H $G'(\alpha, \varepsilon)$ *n'est pas partout dense, quel que soit* α, ε *étant donné, est un ensemble non dense.* (Rappelons qu'*autour d'un point* signifie *dans un intervalle suffisamment petit entourant ce point.*)

En effet, si $Q'(\varepsilon)$ était dense sur un intervalle CD, on voit directement, que, quel que fût α, $G'(\alpha, \varepsilon)$ serait partout non dense dans CD, ce qui est contradictoire avec le fait que, α étant suffisamment grand, $G'(\alpha, \varepsilon)$ est de seconde catégorie dans CD.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant analogue au théorème III.

L'ensemble Q' *des points* H, *pour chacun desquels il est possible de trouver un nombre* ε, *tel que, quel que soit* α, *l'ensemble* $G'(\alpha, \varepsilon)$ *n'est pas partout dense autour de* H, *est de première catégorie.*

Considérons l'ensemble complémentaire de Q'. Pour chaque point K n'appartenant pas à Q', il est possible, quel que soit ε, de

trouver un nombre α supérieur à tout nombre α_0 donné, tel que l'ensemble des points où $|f_\alpha - f| < \varepsilon$ est partout dense autour de K.

Considérons maintenant les six fonctions a_n, a''_n, a'_n, i'_n, i''_n, i_n, relatives à la fonction f_n, et supposons que ces quantités aient des limites quand n croît indéfiniment. Soient a, a'', a', i', i'', i ces six limites. On a

$$a \geqq a'' \geqq \frac{i'}{a'} \geqq i'' \geqq i,$$

et chacune de ces six fonctions est de classe 0, 1 ou 2. Comparons-les aux fonctions A, A'', A', I', I'', I, relatives à f.

Nous allons établir des relations d'inégalités vraies en tous les points autres que ceux d'un ensemble de première catégorie, en l'espèce Q'.

Soit H un point n'appartenant pas à Q'. Soit ε un nombre donné quelconque, aussi petit que l'on veut.

Je prends n_0 assez grand pour que $a'_n(\mathrm{H}) = a'(\mathrm{H}) + \theta\varepsilon$ $(\theta^2 < 1)$ pour toutes les valeurs de n supérieures à n_0.

H n'appartenant pas à Q', je peux prendre parmi ces valeurs de n une valeur telle que l'ensemble des points où $f_n = f + \theta''\varepsilon$ $(\theta''^2 < 1)$ soit dense partout sur CD, CD étant un intervalle entourant H et suffisamment petit. Or :

1° Il est possible de trouver dans tout intervalle intérieur à CD et contenant H un intervalle $(A', 2°)$ en chaque point duquel $f_n < a'_n + \varepsilon$. Dans cet intervalle, l'ensemble des points où $f < a' + 3\varepsilon$ est partout dense. Donc

$$a' \geqq I';$$

2° C_1D_1 étant un intervalle suffisamment petit intérieur à CD et contenant H, dans tout intervalle C_2D_2 intérieur à C_1D_1 il est possible $(A'', 1°)$ de trouver un intervalle en chaque point duquel $f_n < a''_n + \varepsilon$. Donc, l'ensemble des points où $f < a'' + 3\varepsilon$ est dense autour de H. Donc

$$a'' \geqq I'.$$

De même

$$i' \leqq A'', \qquad i'' \leqq A'.$$

a et i donneraient lieu aux inégalités $a \geqq I'$ et $i \leqq A'$, moins

avantageuses, respectivement, que $a'' \geqq I'$ et $i'' \leqq A'$. Nous ne garderons donc que les quatre premières inégalités trouvées.

L'ensemble des points où ces inégalités ne sont pas vraies, à 3η près, est non dense (par exemple l'ensemble des points où l'on n'a pas $a' \geqq I'' - 3\eta$), car l'ensemble des points autour desquels l'égalité $f_n = f + \theta'_\eta$ ne peut avoir lieu sur un ensemble dense est non dense.

Dans chaque intervalle contigu à l'ensemble $Q'(\eta)$ qui est fermé, les relations peuvent être délimitées supérieurement et inférieurement, et les résultats seront vrais à moins de η près. Donc, à part les points de l'ensemble de première catégorie Q', les inégalités obtenues en délimitant les premières sont encore vraies.

Soient a'_α, $a'_{\alpha''}$, $a'_{\alpha'}$, $a'_{i'}$, $a'_{i''}$, a'_i, les six fonctions relatives à a'. Désignons d'une façon analogue les fonctions relatives à i', à a'' et à i''. On trouve que les relations les plus avantageuses se réduisent aux suivantes :

Pour I'', on a $a'' \geqq a'$ et, des douze nombres relatifs à a'' et à a', le plus petit est $a'_{i'}$. Nous prenons donc sans hésitation

$$a'_i \geqq I''.$$

Pour I', le plus petit nombre qui soit un maximum du côté de a' est $a'_i \geqq I'$. Les nombres de même ordre de a'' sont supérieurs à ceux de a'. Mais on ne peut rien dire sur a'' lui-même. Donc, $a'' \geqq I''$ doit être conservé. En résumé :

$$a'_i \geqq I'', \qquad i'_\alpha \leqq A'',$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{i'} \\ a'' \end{array} \right. \geqq I', \qquad \left\{ \begin{array}{l} i'_{\alpha'} \\ i'' \end{array} \right. \leqq A'.$$

Si f_n est continue, $a = \ldots = i = f$. Donc, $I \geqq I''$ et, par suite, $I = I''$, $f \geqq I'$, $A \leqq A''$ et, par suite, $A = A''$, $f \leqq A'$, et cela sur un ensemble complémentaire de première catégorie. Mais cette méthode ne nous donne pas entièrement le résultat

$$A = A'' = A' = I' = I'' = I = f$$

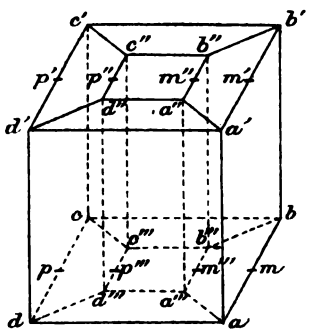
en tous les points autres que ceux d'un ensemble de première catégorie.

SUR L'EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET PAR DES POLYÈDRES DE GENRE UN;

Par M. G. Fontené.

1. Cette Note fait suite au Mémoire qui a paru dans le *Bulletin* sur le même sujet. Je remplacerai l'expression *polyèdre torique* par l'expression *polyèdre réticulé*, qui rappelle la disposition des sommets en q séries de p sommets d'une part, en p séries de q sommets d'autre part, et de même pour les faces.

Fig. 1.



Soit $p = 4$, $q = 4$ (*fig.* 1). Les sommets sont, avec leur double classement,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} a, & b, & c, & d, \\ a', & b', & c', & d', \\ a'', & b'', & c'', & d'', \\ a''', & b''', & c''', & d''', \end{array}\right.$$

et les faces sont

$$\begin{array}{llll} a\,b\,b'\,a', & b\,c\,c'\,b', & c\,d\,d'\,c', & d\,a\,a'\,d, \\ a'\,b'\,b''\,a'', & b'\,c'\,c''\,b'', & c'\,d'\,d''\,c'', & d'\,a'\,a''\,d'', \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots; \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Appelons *sommets opposés* deux sommets tels que a et c'', a'

et c''', ..., et supposons que *les sommets opposés coïncident deux à deux.*

Si l'on considère les lignes du tableau (1), les sommets a'', b'', c'', d'' se confondront respectivement avec c, d, a, b, et a''', b''', c''', d''' se confondront de même avec c', d', a', b'; si l'on considère les colonnes du tableau (1), on dira que c, c', c'', c''' se confondent avec a'', a''', a, a', et d, d', d'', d''' avec b'', b''', b, b'; on a

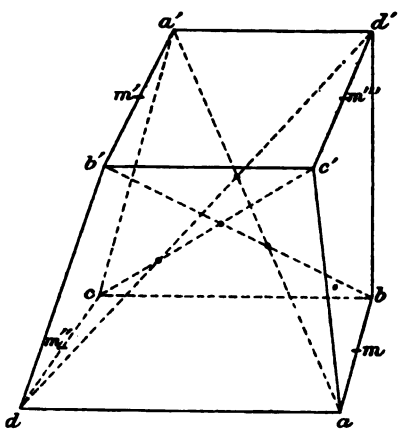
$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{llll} a, & b, & c, & d, \\ a', & b', & c', & d', \\ c, & d, & a, & b, \\ c', & d', & a', & b', \end{array}\right.$$

ou

$$(2')\qquad \left\{\begin{array}{llll} a, & b, & a'', & b'', \\ a', & b', & a''', & b''', \\ a'', & b'', & a, & b, \\ a''', & b''', & a', & b'. \end{array}\right.$$

Le polyèdre obtenu est celui de la figure 2, avec 8 sommets té-

Fig. 2.

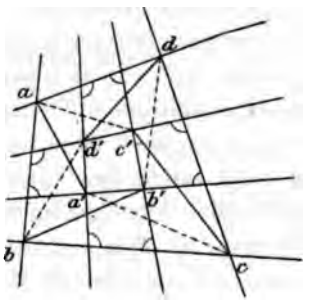


traèdres, 8 faces quadrangulaires, 16 arêtes (F + S = A); les faces, fournies par le tableau (2), sont les quadrilatères $abb'a'$, $bcc'b'$, ..., et les quadrilatères $a'b'dc$, $b'c'ad$, ...

On retrouve ainsi le polyèdre à 8 sommets et à 8 faces signalé

par M. Bricard (*Nouvelles Annales*, 1904); on passe des notations de cet auteur aux notations actuelles en remplaçant a', b', ... par b', c'. .... M. Bricard observe que chacune des 4 droites ab, cd, $a'd'$, $b'c'$ rencontre les 4 droites $a'b'$, $c'd'$, ad, bc [lignes du tableau (2)], de sorte que l'on a là quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde et quatre génératrices de l'autre sys-

Fig. 3.



tème; sur la figure 3, on a indiqué par des arcs de cercle les plans des 8 faces du polyèdre.

[Chacune des quatre droites aa', cc', bd', db', à gauche et à droite dans la figure 3, rencontre de même les 4 droites bb', dd', ac', ca', en bas et en haut de cette figure (colonnes du tableau 2); cela revient à dire que chacune des 4 droites aa', bb', cc', dd', tracées en trait plein, rencontre la suivante, cycliquement, et que la même chose a lieu pour ac', bd', ca', db', tracées en pointillé.]

Réciproquement, si l'on trace sur un hyperboloïde 4 génératrices d'un système, 4 de l'autre, on en déduit un polyèdre de l'espèce indiquée; le polyèdre dépend donc de 17 paramètres, au lieu de 16 que l'on pourrait prévoir, et, sans parler d'hyperboloïde, cela tient à ce que 15 des 16 rencontres de 2 systèmes de 4 droites entraînent la 16e.

Les sommets d'un tel polyèdre forment un système ponctuel de Lamé : ils sont en effet, de 4 manières, répartis 4 par 4 sur 2 plans (*fig.* 2); les faces forment un système tangentiel de Lamé.

De tout cela il résulte, comme l'observe M. Bricard, que le problème de construire un tel polyèdre circonscrit à une qua-

drique Σ et inscrit à une quadrique Σ', au lieu d'être un problème déterminé en apparence, est un problème triplement indéterminé en apparence; et la question qui se pose est de rechercher si, contrairement à toute vraisemblance, les quadriques ne doivent pas ici encore satisfaire à une condition : cette condition remplie, le problème serait quadruplement indéterminé. On va voir qu'il en est ainsi.

2. Dans un article inséré aux *Nouvelles Annales*, 1904, j'ai considéré un cas particulier pour obtenir la condition de fermeture relative aux valeurs $p = 4$, $q = 4$; j'ai trouvé que la fermeture peut avoir lieu sous deux conditions différentes; je montrerai ici que l'une des conditions se rapporte effectivement au polyèdre de la figure 1 ($p = 4$, $q = 4$), tandis que l'autre est relative au polyèdre de la figure 2 ($F = S = 8$); c'est même en cherchant à interpréter plus complètement les deux conditions en question que j'ai été conduit à retrouver le polyèdre de M. Bricard comme un cas de dégénérescence du polyèdre réticulé à 16 sommets et à 16 faces.

Soient les deux quadriques de révolution

$$(\Sigma) \qquad a(x^2+y^2)+cz^2 \qquad +d=0,$$
$$(\Sigma') \qquad a'(x^2+y^2)+c'z^2+2mz+d'=0,$$

et un polyèdre tel que celui de la figure 1 ($p = 4$, $q = 4$), ou celui de la figure 2 ($F = S = 8$), circonscrit à Σ et inscrit à Σ'. Nous supposerons que les contours généralement gauches $abcd$, $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$, $a'''b'''c'''d'''$ (ces deux derniers confondus avec $cdab$ et $c'd'a'b'$ dans le cas de la figure 2) sont des carrés, situés dans des plans parallèles au plan des xy, ayant leurs côtés parallèles, et dont les centres sont sur l'axe des z. Le plan des zx étant supposé perpendiculaire aux arêtes ab, $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$ (qui sont en même temps $c''d''$, $c'''d'''$, cd, $c'd'$ dans la figure 2), en leurs milieux m, m', m'', m''', on a dans ce plan un quadrilatère $mm'm''m'''$ (trapèze isoscèle pour le cas de la figure 2) circonscrit à la conique

$$(S) \qquad y=0, \qquad ax^2+cz^2+d=0.$$

Les points a, a', a'', a''' sont sur la conique obtenue en coupant la quadrique (Σ') par le plan $y = x$, et les points m, m', ... sont sur

la conique

$$(S') \qquad y = 0, \qquad 2a'x^2 + c'z^2 + 2mz + d' = 0,$$

projection de la précédente sur le plan des zx.

La condition de fermeture pour des quadrilatères circonscrits à S et inscrits à S′ est celle-ci : l'équation en λ relative aux deux coniques étant formée d'après l'équation

$$\lambda S + S' = 0,$$

l'une des racines doit être égale à la somme des deux autres. L'une des valeurs de λ est ici

$$\lambda = \frac{-2a'}{a},$$

et les deux autres sont données par l'équation

$$(\lambda c + c')(\lambda d + d') - m^2 = 0;$$

en désignant par λ' et λ'' les racines de cette équation, on doit avoir

$$(3) \qquad -\frac{2a'}{a} = \pm(\lambda' - \lambda'')$$

ou

$$(4) \qquad -\frac{2a'}{a} = \lambda' + \lambda''.$$

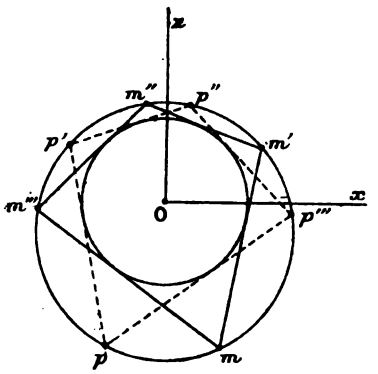
Mais, selon que l'une ou l'autre de ces conditions aura lieu, les diagonales du quadrilatère $mm'm''m'''$ passeront par tel ou tel des trois sommets du triangle autopolaire commun aux deux coniques : avec (3), ces diagonales passeront par l'un des deux points conjugués communs situés sur Oz ; avec (4), ces diagonales mm'' et $m'm'''$ seront parallèles à Ox. [Voici un exemple de ce dernier cas : la condition (4) étant en général

$$\frac{2a'}{a} = \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d},$$

si l'on suppose $a = c$, $2a' = c'$, auquel cas S et S′ sont des cercles, on doit avoir $d' = 0$, c'est-à-dire que S′ doit passer au centre de S. C'est une configuration bien connue, et les diagonales mm'', $m'm'''$ sont alors parallèles à Ox.]

Dès lors, la condition (4) est relative au polyèdre de la figure 2, tandis que (3) se rapporte à celui de la figure 1. Pour ce dernier cas, on a la figure suivante :

Fig. 4.



On doit se représenter les arêtes ab, $a'b'$, $a''b''$, $a'''b'''$ perpendiculaires au plan de la figure en m, m', m'', m''', milieux de ces arêtes, a et a' en avant, a'' et a''' en arrière; les arêtes cd, $c'd'$, $c''d''$, $c'''d'''$ sont de même perpendiculaires au plan de la figure en p, p', p'', p''', milieux de ces arêtes, c et c' en arrière, c'' et c''' en avant; les 16 faces du polyèdre sont :

D'une part, les faces latérales des troncs de pyramide de première espèce $abcda'b'c'd'$ et $a''b''c''d''a'''b'''c'''d'''$;

D'autre part, les faces latérales des troncs de pyramide de seconde espèce $abcda'''b'''c'''d'''$ et $a''b''c''d''a'b'c'd'$.

Si l'on forme maintenant l'équation en λ relative aux deux quadriques d'après l'équation

$$\lambda\Sigma + \Sigma' = 0,$$

deux des valeurs de λ ont pour valeur commune

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-a'}{a},$$

et les deux autres λ_3 et λ_4 sont les valeurs désignées plus haut par λ' et λ''. Les conditions de fermeture deviennent

$$(5) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0$$

pour le polyèdre ($p = 4$, $q = 4$), et

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 \tag{6}$$

pour le polyèdre ($F = S = 8$).

3. Pour le polyèdre de la figure 1, il peut arriver que c'', d'', a'', b'' coïncident avec a', b', c', d', et que c''', d''', a''', b''' coïncident avec a, b, c, d. On a simplement alors un hexaèdre $abcda'b'c'd'$, et ceci ramène au théorème suivant que j'ai donné autrefois (*Nouvelles Annales*, 1899, p. 72) :

Si l'on se propose d'obtenir un hexaèdre à intersections coplanaires, ou un octaèdre à diagonales concourantes, circonscrit à une quadrique Σ *et inscrit à une quadrique* Σ', *le problème, qui paraît être doublement indéterminé, n'est possible que si les racines du discriminant de la forme* $\lambda\Sigma + \Sigma'$ *vérifient la relation* (5), *et ce problème est alors simplement indéterminé.*

Ce cas particulier montre l'intérêt qu'il y aurait à résoudre les deux questions suivantes :

Le polyèdre qui correspond aux valeurs $p = 4$, $q = 4$ *dépend-il de* 32 *paramètres, ou de paramètres en nombre supérieur? En obligeant ce polyèdre à être circonscrit à une quadrique* Σ, *inscrit à une quadrique* Σ', *lui impose-t-on* $16 + 16$ *conditions ou un nombre moindre?*

4. Si l'on remplace la quadrique Σ' par une quadrique quelconque du faisceau ponctuel (Σ, Σ'), quadrique ayant pour équation $m\Sigma + \Sigma' = 0$, les racines de la nouvelle équation en λ sont celles de l'ancienne équation en λ diminuées de m, et ces nouvelles racines vérifient encore la relation (6). Donc, si deux quadriques Σ et Σ' admettent des polyèdres tels que celui de la figure 2 qui soient circonscrits à Σ et inscrits à Σ', la même chose a lieu quand on remplace la quadrique Σ' par une quadrique du faisceau ponctuel déterminé par Σ et Σ'. On peut de même remplacer la quadrique Σ par une quadrique du faisceau tangentiel déterminé par Σ et Σ'.

La condition (6) est celle que j'ai déjà obtenue (*Nouvelles*

Annales, 1905) pour deux quadriques Σ et Σ' telles qu'il existe des contours quadrangulaires situés sur Σ et ayant leurs sommets sur Σ', des contours quadrangulaires situés sur Σ' et ayant les plans de leurs angles tangents à Σ.

5. Pour deux quadriques Σ et Σ', avec des polyèdres réticulés, j'ai établi complètement, dans mon premier Mémoire, la condition

$$(p=3,\ q=3) \qquad \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \ldots \pm \ldots = 0;$$

je viens d'indiquer les conditions

$$\begin{array}{ll} (p=4,\ q=4) & -\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0, \\ (F=S=8) & -\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0. \end{array}$$

L'équation en λ étant

$$\delta\lambda^4+\theta\lambda^3+\varphi\lambda^2+\theta'\lambda+\delta'=0,$$

on a encore

$$\begin{array}{ll} (p=3,\ q=3) & (\theta^2-4\delta\varphi)^2-64\delta^3\delta'=0, \\ (p=4,\ q=4) & \theta^2(\theta^2-4\delta\varphi)+8\delta^2\theta\theta'-16\delta^2\delta'=0, \\ (F=S=8) & \theta\,(\theta^2-4\delta\varphi)+8\delta^2\theta'=0; \end{array}$$

pour la seconde condition, on écrit que $\frac{-\theta}{2\delta}$ satisfait à l'équation en λ; pour la troisième condition, comme on a (avec a, b, c, d au lieu de $\lambda_1, \ldots$),

$$(b+c+d-a)(c+d+a-b)\ldots=\Sigma a^4-2\Sigma a^2b^2-8abcd,$$

on a, en changeant a en $-a$,

$$(b+c+d+a)(c+d-a-b)\ldots=\Sigma a^4-2\Sigma a^2b^2+8abcd,$$

de sorte que ce second produit surpasse le premier de $16\,abcd$: il faut dès lors ajouter $16\delta^3\delta'$ au premier membre de la condition $(p=4,\ q=4)$, et diviser par θ pour obtenir le premier membre de la condition $(F=S=8)$.

Considérons maintenant la racine carrée du polynome

$$\delta+\theta l+\varphi l^2+\theta' l^3+\delta' l^4,$$

soit

$$A+Bh+Ch^2+Dh^3+Eh^4+\ldots:$$

nous aurons

$$\delta = A^2, \qquad \theta = 2AB, \qquad \varphi = 2AC + B^2,$$
$$\theta' = 2AD + 2BC, \qquad \delta' = 2AE + 2BD + C^2$$

et, par suite,

$$\theta^2 - 4\delta\varphi = -8A^3C;$$

les conditions ci-dessus deviennent, en ne tenant pas compte tout d'abord de l'expression de δ',

$$64A^6C^2 - 64A^6\delta' = 0,$$
$$-32A^5B^2C + 32A^5B(AD + BC) - 16A^6\delta' = 0,$$
$$-16A^4BC + 16A^4(AD + BC) = 0,$$

ou

$$\delta' = C^2, \qquad \delta' = 2BD, \qquad D = 0;$$

d'après l'expression de δ', on a enfin

$$(p = 3,\ q = 3) \qquad AE + BD = 0,$$
$$(p = 4,\ q = 4) \qquad 2AE + C^2 = 0,$$
$$(F = S = 8) \qquad D = 0.$$

Ce dernier résultat se rattache à ce que l'on a vu à la fin du n° 4.

REMARQUES SUR CERTAINES QUESTIONS DE PROBABILITÉ;

Par M. Émile Borel.

1. On sait que les questions de probabilité où interviennent des variables continues ne peuvent acquérir de sens qu'en vertu de *conventions* précises. Comme le fait observer Joseph Bertrand, si une variable x est assujettie à rester comprise entre o et 1, son carré x^2 est assujetti aux mêmes conditions et la probabilité pour que x soit compris entre o et $\frac{1}{2}$ est égale à la probabilité pour que x^2 soit compris entre o et $\frac{1}{4}$. Cela serait absurde (¹) si l'on supposait à chacune de ces probabilités une valeur *intrinsèque*, c'est-à-dire définie objectivement d'une manière indépendante de toute convention.

(¹) *Voir* Poincaré, *Calcul des probabilités*, 8e Leçon.

La convention la plus commode, au moins dans le cas où l'ensemble des valeurs possibles de la ou des variables est *borné*, consiste à regarder la probabilité comme proportionnelle à l'*étendue :* longueur, aire, volume, suivant qu'il y a une, deux, trois dimensions.

A la définition de la probabilité se rattache celle de la valeur moyenne; si, dans un intervalle x_0, x_1, on connaît les valeurs d'une fonction réelle $f(x)$, sa valeur moyenne est, par définition,

$$\frac{1}{x_1 - x_0}\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

De même, la valeur moyenne d'une fonction de deux variables x et y définie à l'intérieur d'une aire S du plan de ces variables est, par définition,

$$\frac{\int\int_S f(x, y)\,dx\,dy}{\int\int_S dx\,dy}.$$

Si une fonction f est connue en tout point A d'une portion de surface Σ, sur laquelle est défini un système de coordonnées curvilignes u, v, on peut définir la valeur moyenne de f par l'expression

$$\frac{\int\int_\Sigma f(\mathrm{A})\,\varphi(u, v)\,du\,dv}{\int\int_\Sigma \varphi(u, v)\,du\,dv},$$

dans laquelle $\varphi(u, v)$ désigne une fonction positive arbitrairement choisie une fois pour toutes. On choisira généralement $\varphi(u, v)$ par la condition que l'intégrale qui figure au dénominateur représente l'aire de Σ; mais ce choix n'est nullement nécessaire; il pourrait être parfois plus commode de prendre $\varphi(u, v) = 1$, par exemple.

Tout ce qui précède est bien connu, mais les questions de probabilité ont donné lieu à tant de controverses de mots, provenant simplement d'un défaut d'entente sur les conventions de langage, qu'il ne m'a pas paru inutile de préciser les notions dont je me servirai. Je me bornerai d'ailleurs au cas *d'une dimension;* il n'y

aurait aucune difficulté à étendre ce qui suit au cas général d'un nombre quelconque de dimensions.

2. *Une fonction $f(x)$ est définie pour toutes les valeurs de x comprises entre* 0 *et* 1; *elle est égale à* 1 *si x est commensurable et à* 0 *si x est incommensurable; quelle est sa valeur moyenne?*

Cette question est évidemment équivalente à la suivante :

On sait que x est compris entre 0 *et* 1; *quelle est la probabilité pour que x soit commensurable?*

La réponse évidente (1) aux deux questions précédentes est *zéro*. Cette réponse peut-elle se déduire des formules que nous avons rappelées? Il ne le semble pas, si l'on se borne aux définitions classiques de l'intégrale. Considérons, en effet, une fonction $f(x)$ égale à 0 pour x incommensurable et à 1 pour x commensurable et une fonction $F(x)$ égale à 1 pour x incommensurable et à 0 pour x commensurable; les intégrales

$$\int_0^1 f(x)\,dx, \qquad \int_0^1 F(x)\,dx$$

sont toutes deux dépourvues de sens; pour chacune d'elles l'intégrale inférieure, au sens de M. Darboux, est égale à *zéro* et l'intégrale supérieure égale à *un*. Donc, quelle que soit la convention que l'on adopte, si cette convention ne fait dépendre la valeur moyenne que des intégrales précédentes, calculées au sens classique, on devra attribuer la même valeur moyenne à $f(x)$ et à $F(x)$. Or, cette conclusion est absurde, car la valeur moyenne de $f(x)$ est 0 et la valeur moyenne de $F(x)$ est 1 (2).

Mais, si l'on utilise la nouvelle définition de l'intégrale qui est due à M. Lebesgue (3), on reconnaît que chacune des fonctions $f(x)$ et $F(x)$ est intégrable au sens de M. Lebesgue ou, plus brè-

(1) Poincaré, *Calcul des probabilités*, p. 126.

(2) Si l'on n'admettait pas ce point, on pourrait observer que la somme des valeurs moyennes de $f(x)$ et de $F(x)$ doit être égale à la valeur moyenne de $f(x) + F(x)$, c'est-à-dire à 1.

(3) Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.*

vement, intégrable (L) et que leur intégrale (L) fournit la valeur correcte de la valeur moyenne ou de la probabilité cherchée. Les méthodes de M. Lebesgue permettent donc d'étudier des questions de probabilité qui paraissent inaccessibles par les procédés d'intégration classiques. D'ailleurs, dans les cas particuliers les plus simples, il suffira de se servir de la théorie des ensembles que j'avais appelés *mesurables* (¹) et auxquels M. Lebesgue a donné le nom de *mesurables* (B); l'application de cette théorie des ensembles mesurables au calcul des probabilités a été, à ma connaissance, faite pour la première fois par M. Wiman (²).

3. Rappelons brièvement les principes de la théorie de la mesure des ensembles linéaires de points.

Par définition, *l'ensemble composé de tous les points d'un intervalle a pour mesure la longueur de cet intervalle;* ces ensembles sont les premiers que l'on sache mesurer; on leur donne le nom de *mesurables.* On étend ensuite la catégorie des ensembles mesurables à l'aide des conventions suivantes : 1° *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables deux à deux sans points communs est mesurable et a pour mesure la somme des mesures*; 2° *si un ensemble mesurable* E *contient tous les points d'un autre ensemble mesurable* F, *l'ensemble* E — F *formé de tous les points de* E *qui n'appartiennent pas à* F *est mesurable et a pour mesure la différence des mesures de* E *et de* F; 3° *Si un ensemble* E *est contenu dans un ensemble mesurable* A *de mesure* α *et contient un ensemble mesurable* B *de mesure* β, *nous dirons que la mesure de* E *est inférieure ou égale à* α *et supérieure ou égale à* β; 4° *Si l'on peut démontrer que la mesure d'un ensemble* E *est, quel que soit* ε, *inférieure ou égale à* $m + \varepsilon$ *et supérieure ou égale à* $m - \varepsilon$, *l'ensemble* E *est mesurable et a pour mesure* m (³).

(¹) Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*. Chap. III.

(²) A. Wiman, *Ueber eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwicklungen* (*Kongl. Vetenskaps Akademien Förhandlingar*, 1900, p. 829) et *Bemerkungen über eine von Gylden aufgeworfene Wahrscheinlichkeitsfrage* (Lund, 1901, Håkan Ohlssons Boktryckeri).

(³) L'introduction explicite et générale de la convention 4° est due à M. Lebesgue; j'en avais fait usage dans un cas particulier, sans l'énoncer (*Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 67).

Ces conventions permettent de construire de proche en proche des ensembles mesurables, en nombre infini, dont on se trouve connaître la mesure par leur construction même; elles ne donnent pas immédiatement une méthode simple pour le calcul de la mesure d'un ensemble donné, au cas où il est mesurable; une telle méthode résulte des recherches de M. Lebesgue. Mais, pour les applications que j'ai en vue, il m'a paru préférable de rester à mon point de vue primitif; celui de M. Lebesgue doit, dans d'autres questions, être choisi de préférence.

Rappelons que le point essentiel, dans la théorie de la mesure, consiste à démontrer que les définitions et conventions précédentes ne conduisent jamais à des contradictions. Il est inutile de reproduire ici cette démonstration.

4. Considérons une variable x assujettie à rester comprise entre 0 et 1; soient E un ensemble mesurable de points compris entre 0 et 1 et m la mesure de E. Par définition, la probabilité pour que x appartienne à E est m et la probabilité pour que x n'appartienne pas à E est $1 - m$.

Si E est l'ensemble des valeurs commensurables, on trouve immédiatement $m = 0$, ce qui donne les résultats énoncés plus haut.

Traitons un cas un peu plus compliqué.

Nous dirons qu'un nombre α compris entre 0 et 1 est commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre s'il existe deux entiers premiers entre eux p et q, tels que l'on ait

$$(1) \qquad \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^n}, \qquad q \geqq 2, \qquad p < q.$$

Quelle est la probabilité pour que x, assujetti à être compris entre 0 et 1, soit commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre?

A chaque fraction irréductible $\frac{p}{q}$, faisons correspondre l'intervalle

$$E^{(n)}_{p,q}: \qquad \frac{p}{q} - \frac{1}{q^n}, \qquad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^n};$$

sa longueur est $\frac{2}{q^n}$; la longueur des intervalles analogues pour une

valeur donnée de q est

$$\frac{2\varphi(q)}{q^n},$$

en désignant par $\varphi(q)$ le nombre des nombres premiers à q et inférieurs à q.

L'ensemble $E^{(n)}$ des points distincts contenus dans les ensembles $E^{(n)}_{p,q}$ est évidemment mesurable; sa mesure e_n est inférieure à m_n en posant

$$m_n = 2\sum_{q=2}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^n}.$$

La série est convergente pour $n > 2$; si $n = 2$, on sait, en effet, que tout nombre α satisfait d'une infinité de manières à l'inégalité (1). En supposant n au moins égal à 3, la série m_n est convergente et a une valeur visiblement inférieure à 1, car on a

$$\varphi(q) \leqq q - 1$$

et

$$2\sum_{2}^{\infty} \frac{q-1}{q^3} = \frac{\pi^2}{3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) < 1.$$

Si l'on convient, lorsqu'un nombre incommensurable α vérifie l'inégalité (1) pour plusieurs systèmes de valeurs de p et de q, de lui donner un coefficient égal à ce nombre de fois [1], nous pourrons dire que *la probabilité pour que x soit commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre est précisément m_n*; mais, si l'on ne fait pas cette convention, la probabilité est $e_n < m_n$; il est aisé de calculer e_n avec autant d'approximation que l'on veut; il n'est peut-être pas possible de l'exprimer en termes finis au moyen de nombres algébriques ou de nombres transcendants usuels. La probabilité pour que *x ne soit pas commensurable aux unités près du $n^{\text{ième}}$ ordre* est $1 - e_n$.

5. Dans une prochaine Note, j'indiquerai des applications des remarques précédentes aux problèmes les plus simples qui se posent dans les recherches de Mécanique et de Physique mathématique où intervient le calcul des probabilités.

---

[1] On est ainsi conduit à donner à certains α un coefficient infini; le fait que la probabilité reste finie doit être signalé.

SUR LES SOLUTIONS DE CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES; APPLICATIONS A UN SYSTÈME HYDRAULIQUE DE n RÉSERVOIRS;

PAR M. ED. MAILLET.

I.

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

J'ai étudié ailleurs [1] les variations des débits des systèmes de réservoirs cylindriques munis d'orifices (ajutages ou vannes) ou de déversoirs (ces derniers non noyés) de communication.

Je reviens ici sur cette question en discutant des cas plus généraux, particulièrement pour n réservoirs munis exclusivement de déversoirs non noyés. Je trouve encore dans ce dernier cas une famille de solutions simples asymptotiques à toutes les solutions, même quand on regarde comme légèrement variables avec la charge, conformément à l'expérience (Poncelet, Lesbros, Bazin, etc.), certains coefficients qui entrent dans les formules du débit des déversoirs.

J'indique en même temps des systèmes d'équations différentielles non linéaires corrélatifs ou plus généraux dont on peut trouver au moins une solution particulière simple dépendant d'une constante arbitraire et qui est parfois encore asymptotique à toute une catégorie de solutions.

II.

Exposé du problème. — Je considère n réservoirs cylindriques de surfaces $S_1, \ldots, S_n$; par hypothèse, S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ possède des déversoirs superficiels non noyés dont la crête est horizontale, à un même niveau y_i pour S_i, si S_i en a plusieurs. Les eaux issues de S_i alimentent un ou plusieurs des réservoirs

[1] *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris*, 13 mars 1905.

$S_{i+1}, \ldots, S_n$ et peuvent aussi se déverser en partie à l'extérieur [1]; S_n se déverse à l'extérieur.

Soient $Y_1, \ldots, Y_n$ les niveaux respectifs des n réservoirs à l'instant t; je suppose toujours

$$y_i > Y_{i+j} \geq y_{i+j},$$

quand S_i alimente S_{i+j}, de façon qu'aucun des déversoirs ne soit noyé.

Pendant le temps dt, le réservoir S_i reçoit de $S_1, \ldots, S_{i-1}$ des quantités d'eau

$$\left[a_{i1}(Y_1 - y_1)^{\frac{3}{2}} + \ldots + a_{i,i-1}(Y_{i-1} - y_{i-1})^{\frac{3}{2}}\right] dt,$$

certains des coefficients a_{ij} pouvant être nuls; il perd par ses déversoirs propres

$$a_{ii}(Y_i - y_i)^{\frac{3}{2}}\, dt.$$

D'après l'expérience [2], $a_{i1}, \ldots, a_{ii}$ sont peu variables quand $Y_1, \ldots, Y_n$ varient dans des limites étendues, les déversoirs ayant des largeurs constantes; je les supposerai constants; au surplus, des variations convenables, légères, des largeurs des déversoirs avec l'épaisseur des lames déversantes, permettraient d'assurer, je pense, la constance des a_{ij}, ou à peu près.

Donc

$$S_i \frac{dY_i}{dt} = a_{i1}(Y_1 - y_1)^{\frac{3}{2}} + \ldots + a_{i,i-1}(Y_{i-1} - y_{i-1})^{\frac{3}{2}} - a_{ii}(Y_i - y_i)^{\frac{3}{2}}.$$

Je pose

$$(1) \qquad u_j = (Y_j - y_j)^{\frac{1}{2}} > 0,$$

u_j étant ainsi proportionnel à la vitesse moyenne sur la crête (ou au voisinage) des déversoirs corrélatifs de S_j, et j'obtiens, pour

---

(1) Cette dernière hypothèse pourrait être laissée de côté, car il suffit, pour qu'on puisse le faire, d'ajouter un dernier réservoir auxiliaire R assez bas, recueillant celles des eaux des autres réservoirs qui pourraient se déverser à l'extérieur.

(2) *Voir* Collignon, *Hydraulique*, 2e édit., 1880, p. 148, Paris, Dunod; ou encore l'*Hydraulique* de Graeff, t. II, ou celle de M. Flamant, 1re édit., 1891, p. 108; aussi les *Mémoires* de M. Bazin dans les *Annales des Ponts et Chaussées*.

définir le mouvement, les équations différentielles

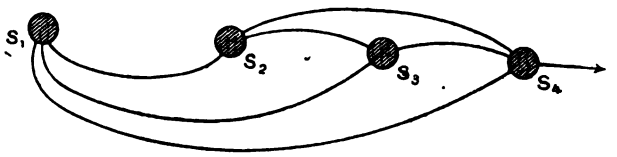
$$(2)\qquad \begin{cases} 2u_1\dfrac{du_1}{dt} = -\lambda_{11}u_1^2, \\ 2u_i\dfrac{du_i}{dt} = \lambda_{i1}u_1^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1}u_{i-1}^2 - \lambda_{ii}u_i^2 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

où les λ_{ij} sont $\geqq 0$ et $\lambda_{ii} > 0$.

Il est bien entendu que certains des λ_{ij}, quand $i \neq j$, et même tous, peuvent être nuls pour chaque valeur de i (¹).

Le schéma ci-contre indique la distribution correspondante des communications hydrauliques quand $n = 4$ et que tous les λ sont $\neq 0$.

Fig. 1.



Solutions simples $u_i = \dfrac{\rho_i}{a+t}$. — Le système (2) est compris

(¹) Des analogies ne sont pas impossibles dans la nature, chaque réservoir pouvant être constitué, par exemple, soit par un lac souterrain, soit par un banc de calcaire très fissuré horizontalement et verticalement, où les communications sont assez faciles pour que les variations de niveau d'eau s'y fassent sentir rapidement à chaque instant. Des nappes d'eau de cette nature existent probablement dans le *cran*, sorte de craie tuffeau blanche et fendillée, qui ne présente pas de grosses masses compactes (à Venette, près Compiègne, village situé à 600ᵐ environ du barrage de Venette, sur l'Oise, lors de la mise en chômage de la rivière, les puits se vident en 24 heures et reviennent au niveau primitif dans le même délai quand le chômage cesse).

Soit un massif calcaire (ou autre) étendu, où toutes les fissures et toutes les poches communiquent très vite au point de vue hydraulique, et supposé limité par des plans presque verticaux sur une certaine épaisseur. Il pourra jouer le rôle d'un réservoir à peu près cylindrique : il suffira pour cela que la proportion du vide au plein dans chaque tranche horizontale soit à peu près constante, ce qui n'est pas invraisemblable, au moins pour la partie du massif qui ne serait pas constamment noyée et qui n'a pas besoin d'avoir une grande épaisseur, une dizaine de mètres au plus.

D'autre part, on peut encore songer à traiter le cas où le dernier des réservoirs ne se vide pas à l'extérieur et est rempli par les autres. Il suffira d'ajouter aux

dans le système plus général

$$(3) \qquad u_i \frac{du_i}{dt} = \mu_{i1} u_1^2 + \ldots + \mu_{in} u_n^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui admet la solution

$$(4) \qquad u_i = \frac{\rho_i}{a + t} \qquad (\rho_i,\ a \text{ constantes}),$$

les ρ_i étant déterminés par le système d'équations

$$-\rho_i^2 = \mu_{i1} \rho_1^2 + \ldots + \mu_{in} \rho_n^2.$$

Ce dernier système a, dans des cas étendus, au moins un système de solutions réelles, car si l'on se donne les ρ_i et $n(n-1)$ des quantités μ_{ij}, les n autres se trouvent déterminées, pourvu qu'une seule de ces n autres figure dans chaque équation.

Dans le cas du système (2),

$$\begin{aligned} -2\rho_1^2 &= -\lambda_{11} \rho_1^2, \\ -2\rho_i^2 &= \lambda_{i1} \rho_1^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1} \rho_{i-1}^2 - \lambda_{ii} \rho_i^2, \end{aligned}$$

ou

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda_{11} \rho_1 &= 2, \\ \lambda_{ii} \rho_i^2 - 2\rho_i^2 - (\lambda_{i1} \rho_1^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1} \rho_{i-1}^2) &= 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation générale (5) admet toujours une solution positive

---

n réservoirs considérés, dont le mouvement continue à être régi par (2) et a les mêmes propriétés, un $(n+1)^{\text{ième}}$ réservoir de niveau Y_{n+1} croissant. On pose

$$Y_{n+1} = u_{n+1}^2,$$

et l'on a l'équation différentielle supplémentaire

$$\frac{dY_{n+1}}{dt} = \lambda_{n+1,1} u_1^2 + \ldots + \lambda_{n+1,n} u_n^2 = 2 u_{n+1} \frac{du_{n+1}}{dt}$$

à ajouter aux équations (2). Quand $u_1, \ldots, u_n$ sont de la forme

$$\frac{\rho_i}{a + t} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

u_{n+1} est tel que $\frac{dY_{n+1}}{dt} = \frac{A}{(a+t)^3}$, avec $A > 0$; $Y_{n+1} = \alpha - \frac{1}{2} \frac{A}{(a+t)^2}$, où α est évidemment positif : c'est la valeur asymptotique de Y_{n+1} pour toutes les conditions initiales du système correspondant à un même volume total contenu dans les réservoirs, d'après ce qui est établi plus loin.

$\rho_i > 0$, et une seule, fonction de $\rho_1, \ldots, \rho_{i-1}$; a reste arbitraire, et le système de réservoirs est toujours susceptible des mouvements définis par (4) et (5). Ces mouvements ne sont pas d'ailleurs distincts au fond, car changer la valeur de a revient à changer l'origine des temps, et, de plus, les diverses quantités $\frac{\rho_j}{a+t}$, pour une même valeur de j, sont toutes asymptotiques à l'une d'elles, le rapport de deux quelconques tendant vers 1 quand t croît indéfiniment.

Stabilité de la solution $u_i = \frac{\rho_i}{a+t}$. — Je vais établir que toute solution du système (2) est asymptotique à une des solutions (4) et (5), pour laquelle la valeur de a est déterminée par le régime du premier réservoir S_1.

Cette propriété est vraie quand $n = 1$: j'admettrai qu'elle le soit pour les $i-1$ premiers réservoirs, et je vais la démontrer pour i; autrement dit, j'admets que, lorsque t est assez grand,

$$\frac{u_j(a+t)}{\rho_j} \qquad (j \leqq i-1)$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité, et je vais établir qu'il en est de même pour $u_i \frac{(a+t)}{\rho_i}$.

Je pose

$$(6) \qquad u_i = u_1 z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n,\ z_1 = 1),$$
$$du_i = u_1\, dz_i + z_i\, du_1.$$

D'après (2),

$$dt = -\frac{2du_1}{\lambda_{11} u_1^2} = \frac{2u_i\, du_i}{\lambda_{i1} u_1^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1} u_{i-1}^2 - \lambda_{ii} u_i^2},$$
$$-\frac{du_1}{\lambda_{11}} = \frac{z_i(u_1\, dz_i + z_i\, du_1)}{\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^2 - \lambda_{ii} z_i^2},$$
$$du_1(\lambda_{i1} z_i^2 - \lambda_{i1} - \ldots - \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^2 - \lambda_{11} z_i^2) = \lambda_{11} u_1 z_i\, dz_i,$$
$$(7) \qquad \frac{-u_1\, dt}{2} = \frac{du_1}{\lambda_{11} u_1} = \frac{z_i\, dz_i}{\lambda_{ii} z_i^2 - \lambda_{11} z_i^2 - (\lambda_{i1} + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^2)}.$$

Je pose

$$(8) \qquad \gamma_i(z_i) = \lambda_{ii} z_i^2 - \lambda_{11} z_i^2 - (\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^2 + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^2).$$

L'équation

$$\chi_i(z_i) = 0$$

possède une et une seule racine positive $\zeta_i > 0$ fonction de $z_2, \ldots, z_{i-1}$ (les z_j sont $\geqq 0$). On sait que, quand t croît indéfiniment, $z_2, \ldots, z_{i-1}$ ont pour limites $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{\rho_3}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}$; t étant suffisamment grand, $z_2, \ldots, z_{i-1}$ sont aussi voisins qu'on veut de ces limites; ζ_i est aussi voisin qu'on veut de la racine positive > 0 unique de

$$\lambda_{ii} z_i^3 - \lambda_{11} z_i^2 - \frac{1}{\rho_1^2}(\lambda_{i1}\rho_1^3 + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^3) = 0,$$

ou de

$$\lambda_{ii}\rho_1^3 z_i^3 - 2\rho_1^2 z_i^2 - (\lambda_{i1}\rho_1^3 + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^3) = 0,$$

laquelle est $\frac{\rho_i}{\rho_1}$, d'après (5).

D'après (7) et (8), quand $z_i > \zeta_i$, $\frac{dz_i}{dt}$ est négatif et z_i décroît; quand $z_i < \zeta_i$, $\frac{dz_i}{dt}$ est positif et z_i croît : z_i reste limité et > 0, quel que soit t fini.

Je dis que, quel que soit l'intervalle de t_2 à t_3, quand t_2, puis $t_3 - t_2$, sont assez grands, il y a une valeur t_4 de t au moins, avec $t_3 \geqq t_4 \geqq t_2$, pour laquelle $|\chi_i(z_i)|$ est aussi petit qu'on veut.

En effet, je suppose que, dans cet intervalle, $|\chi_i(z_i)|$ reste $> B_1$ (B_1 positif fixe). D'après (7),

$$z_i \frac{dz_i}{dt} = -\frac{u_1}{2}\chi_i(z_i),$$

$$\left| z_i \frac{dz_i}{dt} \right| \geqq B_1 \frac{u_1}{2} = \frac{B_1}{2} \frac{\rho_1}{a+t},$$

et $z_i \frac{dz_i}{dt}$ conserve un signe constant :

$$|(z_i^2)|_{t_2}^{t_3} \geqq B_1 \rho_1 \log \frac{a+t_3}{a+t_2}.$$

On sait que z_i reste limité, alors que $\log \frac{a+t_3}{a+t_2}$ est aussi grand qu'on veut quand $t_3 - t_2$ est assez grand : on est conduit à une absurdité.

Je considère maintenant ce qui se passe à partir de l'instant t_4, et je suppose que, à un moment quelconque ultérieur, z_i vienne à

différer de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ d'une quantité fixe ε arbitraire :

$$\left| z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right| = \varepsilon.$$

t étant assez grand,

$$\left| \zeta_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right| < \varepsilon;$$

si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} > 0$, $z_i > \zeta_i$ et, d'après (7), z_i décroît; si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} < 0$, $z_i < \zeta_i$ et, d'après (7), z_i croît. A chaque instant, z_i ne peut différer de ζ_i de plus de ε en plus ou en moins.

t_2 et t_3 étant pris assez grands, ε peut être pris aussi petit qu'on veut; donc z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$. C. Q. F. D.

Remarque. — Si, à un instant quelconque du mouvement, on a

$$z_j = \frac{\rho_j}{\rho_1}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, i$, u_1 étant forcément de la forme $\frac{\rho_1}{a+t}$, en vertu du théorème de Cauchy sur l'unicité de la solution du système (2) ou des i premières équations de ce système correspondant à des valeurs données des u_j à un instant donné, le mouvement sera entièrement défini par (4) et (5) pour les i premiers réservoirs. Pour les autres, la solution est encore régie par (6) et (7).

Systèmes de réservoirs avec régime propre permanent. — Chaque réservoir d'un pareil système reçoit simultanément de l'extérieur des volumes d'eau (provenant de pluies par exemple) $\sigma_1 S_1, \ldots, \sigma_n S_n$ sensiblement proportionnels, en sorte que

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = h_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\sigma_n}{\sigma_1} = h_n$$

sont des nombres à peu près fixes pour toutes les venues d'eau. Le système sera dit posséder un régime propre *permanent* si l'arrivée aux réservoirs de ces quantités, au moment où une des solutions asymptotiques simples est réalisée, a seulement pour effet, après une courte période troublée, que l'on néglige dans le calcul, de rétablir une solution asymptotique simple.

Pour un réservoir unique ($n = 1$), la réponse est toujours affirmative. Je prends n quelconque : les niveaux deviennent, après chaque venue d'eau, si le régime propre permanent est possible,

$$\frac{\rho_i^2}{(a+t)^2} + \sigma_1 h_i = \frac{\rho_i^2}{(a'+t)^2} \qquad (h_1 = 1),$$

et l'on en conclut sans peine que la condition nécessaire et suffisante est

$$h_j = \frac{\rho_j^2}{\rho_1^2}.$$

Les équations précédentes se réduisent alors à une seule qui permet de calculer a'.

On voit que, pour $n \geqq 2$, les systèmes de réservoirs en question sont des systèmes particuliers quand les h_j sont donnés. Un système de réservoirs quelconque est susceptible d'un régime propre permanent pour un système de valeurs des h_j, c'est-à-dire, si les venues d'eau sont dues aux pluies, pour une répartition convenable des pluies sur les bassins versants. Mais, dans de plus larges limites, si les h_j ne diffèrent pas trop de $\frac{\rho_j^2}{\rho_1^2}$, les choses se passeront pratiquement, au bout d'un certain temps après chaque venue d'eau, à peu près comme s'il y avait un régime propre permanent, grâce à l'existence des solutions asymptotiques simples à toutes les solutions.

III.

Cas où les λ_{ij} sont légèrement variables. — On sait, d'après de nombreuses expériences (Poncelet, Lesbros, Bazin, etc.) que, si les déversoirs sont supposés avoir une largeur constante, les coefficients a_{ij}, par suite les coefficients λ_{ij}, dans (2), seront légèrement variables [1] avec les $Y_i - y_i$ ou les u_i. On peut se demander dans quelle mesure les conclusions précédentes se trouvent altérées de ce fait.

---

[1] Assez souvent dans la proportion de $\frac{1}{15}$ à $\frac{1}{20}$ de leur valeur moyenne en plus ou en moins dans les limites des expériences.

J'admettrai que, dans les limites où varie u_i, les coefficients λ_{ii}, $\lambda_{i+1,i}$, ..., λ_{ni}, qui sont fonctions de u_i seul, restent positifs, limités supérieurement et inférieurement, et tendent, s'ils sont $\neq 0$, vers des limites fixes > 0 lorsque u_i tend vers 0.

La première équation (2) donne

$$dt = -\frac{2\,du_1}{\lambda_{11}u_1^2},$$

où λ_{11} est fonction légèrement variable de u_1;

$$t = -2\int \frac{du_1}{\lambda_{11}u_1^2},$$

et u_1 décroît quand t croît; λ_{11} restant toujours compris entre certaines limites finies > 0, on pourra écrire $t - t_0 = M\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(0)}}\right)$, où M est positif et compris entre les deux valeurs extrêmes de $\frac{2}{\lambda_{11}}$ pour $t \geqq t_0$: il en résulte que u_1 tend vers zéro quand t croît indéfiniment.

Je dis que, si λ'_{11} est la limite de λ_{11} pour $u_1 = 0$, M tend vers $\rho_1 = \frac{2}{\lambda'_{11}}$ quand t croît indéfiniment.

En effet, t_1 étant suffisamment grand par rapport à t_0,

$$t - t_1 = M_1\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(1)}}\right),$$

où $u_1^{(1)}$ est aussi petit qu'on veut et $|M_1 - \rho_1| < \varepsilon$, ε étant un nombre fixe aussi petit qu'on veut;

$$t - t_0 = (t - t_1) + (t_1 - t_0) = M_1\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_1^{(1)}}\right) + M'\left(\frac{1}{u_1^{(1)}} - \frac{1}{u_1^{(0)}}\right).$$

t_1 étant fixé comme il est dit ci-dessus, M' est fixé, et il en résulte que, quand t croît indéfiniment, u_1 tend vers 0 et $\frac{M}{M_1}$ vers l'unité; quand t est assez grand, on a

$$|M - M_1| < \varepsilon, \qquad |M_1 - \rho_1| < \varepsilon, \qquad |M - \rho_1| < 2\varepsilon,$$

c'est-à-dire que, quand t croît indéfiniment, M ne peut différer

de ρ_1 de plus de 2ε, si petit que soit ε, et a pour limite $\frac{2}{\lambda'_{11}} = \rho_1$.

Dès lors, quand t est assez grand,

$$\frac{1}{u_1} = \frac{1}{u_1^{(0)}} + \frac{t - t_0}{M},$$

et, a étant fixe et arbitraire,

$$\frac{\rho_1}{u_1(a+t)} = \frac{\rho_1}{(a+t)u_1^{(0)}} + \frac{t - t_0}{M(a+t)}\rho_1$$

a pour limite l'unité, quel que soit a, quand t croît indéfiniment.

Ceci établi, je considère le système qu'on déduit de (2) en remplaçant les λ_{ij} par leurs valeurs limites λ_{ij} pour $u_1, \ldots, u_n$ tendant vers zéro :

$$(2\ bis) \qquad 2u'_i \frac{du'_i}{dt} = \lambda'_{i1} u_1^2 + \ldots + \lambda'_{i,i-1} u_{i-1}^2 - \lambda'_{ii} u_i^2,$$

et le système analogue à (5) correspondant à (2 *bis*)

$$(5\ bis) \qquad \begin{cases} \lambda'_{11}\rho_1 = 2, \\ \lambda'_{ii}\rho_i^2 - 2\rho_i^2 - (\lambda'_{i1}\rho_1^2 + \ldots + \lambda'_{i,i-1}\rho_{i-1}^2) = 0. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, je sais que, quand $n = 1$, il existe toujours une solution de (2 *bis*) telle que

$$\frac{u_1}{u'_1} = \frac{u_1(a+t)}{\rho_1}$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité pour toutes les valeurs de t supérieures à une limite assez grande. J'admettrai alors que, pour les valeurs de t analogues,

$$\frac{u_j(a+t)}{\rho_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1)$$

diffère d'aussi peu qu'on veut de l'unité. Je vais établir qu'il en est de même pour

$$\frac{u_i(a+t)}{\rho_i}.$$

La transformation (6) conduit encore aux équations (7) et (8).

Quand t croît indéfiniment, $z_2, \ldots, z_{i-1}$ ont pour limites $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}$ déterminés par (5 *bis*), et, quand t est assez grand, la racine $\zeta_i > 0$ de $\chi_i(z_i) = 0$ est aussi voisine qu'on veut de la racine positive unique $\zeta_i'' > 0$ de

$$(9) \qquad \lambda_{ii}\rho_1^3 z_i^3 - 2\rho_1^3 z_i^2 - (\lambda'_{i1}\rho_1^3 + \ldots + \lambda'_{i,i-1}\rho_{i-1}^3) = 0,$$

car $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{i,i-1}$ ne dépendent que de $u_1, \ldots, u_{i-1}$ et sont aussi voisins qu'on veut de $\lambda'_{i1}, \ldots, \lambda'_{i,i-1}$ quand t est assez grand.

λ_{ii} étant toujours fini et $\neq 0$, ζ_i'' est limité.

On peut d'ailleurs prendre encore t_2, puis $t_3 - t_2$ assez grands pour que $|\chi_i(z_i)|$ devienne aussi petit qu'on veut pour une valeur de t_4 comprise entre t_2 et t_3; à ce moment, z_i est aussi voisin qu'on veut de ζ_i''. Or $z_i = \frac{u_i}{u_1}$, et u_1 est aussi petit qu'on veut; donc aussi u_i. Par suite λ_{ii} est aussi voisin qu'on veut de sa limite λ'_{ii}, et ζ_i'' aussi voisin qu'on veut de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$.

Ceci posé, que se passe-t-il à partir de l'instant t_4? Si, à un moment quelconque ultérieur, z_i vient à différer de $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ d'une quantité finie positive arbitraire,

$$\left| z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right| = \varepsilon.$$

t étant assez grand, et ε modéré, u_i est encore aussi pétit qu'on veut, λ_{ii} diffère de λ'_{ii} d'aussi peu qu'on veut, et $\left| \zeta_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} \right|$ est $< \varepsilon$. Dès lors, si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} > 0$, $z_i > \zeta_i$: d'après (7), z_i décroît; si $z_i - \frac{\rho_i}{\rho_1} < 0$, $z_i < \zeta_i$: d'après (7), z_i croît. A chaque instant, z_i ne peut différer de ζ_i de plus de ε en plus ou en moins.

t_2 et t_3 étant pris assez grands, ε peut être pris aussi petit qu'on veut; donc z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$. C. Q. F. D.

Finalement *les conclusions sont les mêmes que dans le cas où les λ_{ij} sont constants.*

IV.

Systèmes de $p_1+p_2+\ldots+p_n$ réservoirs avec déversoirs. — Au lieu de S_1, je considère p_1 réservoirs cylindriques de surfaces $S_1^{(1)}, \ldots, S_1^{(p_1)}$, formant un groupe $\Sigma_1, \ldots$, au lieu de S_i, p_i réservoirs cylindriques de surfaces $S_i^{(1)}, \ldots, S_i^{(p_i)}$ formant un groupe $\Sigma_i, \ldots$; de façon que chaque réservoir du groupe Σ_i ($i=1, 2, \ldots, n$) possède un ou une série de déversoirs de crête arasée au même niveau pour chaque réservoir et que ses eaux aillent, dans une proportion quelconque, alimenter les réservoirs des groupes $\Sigma_{i+1}, \ldots, \Sigma_n$, ou même se déversent en partie à l'extérieur. Je supposerai que le niveau de la crête des déversoirs de chaque réservoir est supérieur à celui des eaux des réservoirs qu'il alimente, autrement dit que les déversoirs ne sont jamais noyés.

Pour la commodité du raisonnement j'ajoute un dernier réservoir R de niveau inférieur aux crêtes des déversoirs de tous les autres, recueillant toutes les eaux que les autres déversent à l'extérieur, et les laissant échapper par un déversoir unique à crête horizontale. Puis je pose

$$S_1 = S_1^{(1)}, \quad \ldots, \quad S_{p_1} = S_1^{(p_1)}, \quad \ldots,$$
$$S_{p_1+\ldots+p_i+1} = S_{i+1}^{(1)}, \quad \ldots, \quad S_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}} = S_{i+1}^{(p_{i+1})},$$
$$S_{p_1+\ldots+p_n+1} = R.$$

On remarque alors que le réservoir S_j alimente exclusivement un certain nombre des réservoirs $S_{j+1}, \ldots, S_{p_1+\ldots+p_n+1}$. On se trouve donc dans le cas traité précédemment, qui est ainsi très général.

Systèmes de réservoirs avec orifices de fond ou latéraux. — Au lieu de supposer que la vidange se fait par des déversoirs, on peut supposer qu'elle se fait par des orifices (vannes, ajutages, etc.). Chaque réservoir étant muni d'orifices non noyés dont les centres de gravité sont au même niveau pour un même réservoir, on peut raisonner comme pour établir les équations (2), $(Y_j-y_j)^{\frac{3}{2}}$ étant remplacé par $(Y_j-y_j)^{\frac{1}{2}}$. On est conduit à un système d'équations

différentielles compris dans les systèmes

$$(10) \qquad u_i \frac{du_i}{dt} = \mu_{i1}^1 u_1 + \ldots + \mu_{in}^1 u_n \quad (^1).$$

Systèmes de réservoirs avec un nombre quelconque d'orifices noyés ou non ou de déversoirs. — Les réservoirs sont cylindriques, les déversoirs ont leur crête horizontale et ne sont pas noyés. En prenant encore comme fonctions à déterminer u_i des quantités proportionnelles aux vitesses (moyennes) à travers chaque orifice ou chaque déversoir, on obtiendra un système de la forme

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_i \dfrac{du_i}{dt} = \lambda_{i1} u_1 + \ldots + \lambda_{ip} u_p + \lambda_{i,p+1} u_{p+1}^3 + \ldots + \lambda_{iq} u_q^3 \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, p+q). \end{array} \right.$$

Dans les seconds membres, les termes linéaires proviennent des orifices, les termes cubiques des déversoirs.

V.

Indication de problèmes analogues.

1° *Théorie de la chaleur.* — Si l'on se reporte à la figure de la page 131, on pourra supposer que $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des corps conducteurs à températures $T_1, T_2, \ldots, T_n$ communiquant, au point de vue calorifique, par des fils de dimensions négligeables, de façon que le corps S_i ne fournisse de la chaleur qu'aux corps $S_{i+1}, \ldots, S_n$. On pourra supposer, ou non, négligeables les pertes par le milieu ambiant; T_n communique ou non avec un corps à température fixe T_0. A une première approximation, les échanges

---

(1) Dans le cas de $n = 2$, les systèmes (3) et (10) s'intègrent par des quadratures.

Exemple. — Dans le cas de (3), on a

$$dt = \frac{u_1\, du_1}{\mu_{11} u_1^3 + \mu_{12} u_2^3} = \frac{u_2\, du_2}{\mu_{21} u_1^3 + \mu_{22} u_2^3};$$

on est ramené à une équation différentielle homogène, puis, par le changement de variable $u_2 = u_1 z$, à des quadratures.

Le système (10) peut admettre une solution linéaire réelle $u_i = \rho_i(a + t)$ dépendant d'un paramètre arbitraire a.

de chaleur pendant le temps dt d'un corps à l'autre étant proportionnels aux différences de température, les équations différentielles seront linéaires et à coefficients constants.

2° *Théorie des gaz.* — On pourra supposer que $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont des réservoirs d'air ou de gaz comprimé ou raréfié qui communiquent dans des conditions variées (écoulement isotherme ou adiabatique). Je n'insiste pas ici, comptant revenir sur ce problème.

3° *Équations différentielles; systèmes plus généraux.* — On peut considérer les systèmes plus généraux que (3) et (10)

$$u_i^k\left(\frac{du_i}{dt}\right)^l = \mu_{i1}u_1^m + \ldots + \mu_{in}u_n^m$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je cherche une solution

$$u_i = \rho_i(a+t)^s,$$
$$\frac{du_i}{dt} = s\rho_i(a+t)^{s-1},$$
$$\rho_i^{k+l}s^l(a+t)^{ks+ls-l} = (\mu_{i1}\rho_1^m + \ldots + \mu_{in}\rho_n^m)(a+t)^{sm};$$

je prendrai

$$ks + ls - l = sm,$$
$$s(k+l-m) = l,$$

ce qui est toujours possible quand $k + l \neq m$. Les ρ_i sont alors déterminés par

$$\rho_i^{k+l}s^l = \mu_{i1}\rho_1^m + \ldots + \mu_{in}\rho_n^m \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ce qui est toujours possible pour une infinité de systèmes de valeurs des μ_{ij}, quels que soient k, l, m $(k + l - m \neq 0)$. La solution trouvée dépend d'une constante arbitraire a; k, l, m peuvent être fractionnaires [1].

---

[1] Le système

$$u_1^l\varphi_i\left(\frac{u_2}{u_1}, \ldots, \frac{u_n}{u_1}\right) = \left(\frac{du_i}{dt}\right)^l \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où φ_i est une fonction de $\frac{u_1}{u_2}, \ldots, \frac{u_n}{u_1}$, comprend comme cas particuliers les sys-

Si $k+l=m$, on cherchera une solution $u_i = \rho_i e^{\alpha t}$:

$$\rho_i^m \alpha^l = \mu_{i1}\rho_1^m + \ldots + \mu_{in}\rho_n^m,$$

ce qui conduit à une équation de degré n en α^l et donne, en général, nl valeurs de α. Quand $l=1$, le changement de variables $u_i^m = w_i$ conduit à un système d'équations linéaires à coefficients constants.

On peut montrer que, pour certains des systèmes différentiels précédents, comprenant les systèmes (2), les solutions simples ci-dessus sont asymptotiques à une catégorie de solutions. J'envisage les systèmes de la forme [1]

$$(2\ ter)\quad \begin{cases} u_i^k \dfrac{du_i}{dt} = \lambda_{i1}u_1^m + \ldots + \lambda_{i,i-1}u_{i-1}^m - \lambda_{i,i}u_i^m, \\ m>0, \quad k>0, \quad m-k-1>0, \quad \lambda_{ij}\geqq 0, \quad \lambda_{ii}>0, \end{cases}$$

qui sont analogues à (2). D'abord, on a la solution

$$u_i = \rho_i(a+t)^s,$$

avec $s = \dfrac{1}{k+1-m} < 0$,

$$\rho_i^{k+1}s = \lambda_{i1}\rho_1^m + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^m - \lambda_{i,i}\rho_i^m,$$

$$\rho_1^{k+1}s = -\lambda_{11}\rho_1^m, \qquad \rho_1^{k+1-m} = -\lambda_{11}(k+1-m) > 0,$$

ou

$$(5\ ter)\quad \begin{cases} \rho_1^{k+1-m} = \lambda_{11}(m-k-1) > 0, \\ \lambda_{ii}\rho_i^m - \dfrac{1}{m-k-1}\rho_i^{k+1} - (\lambda_{i1}\rho_1^m + \ldots + \lambda_{i,i-1}\rho_{i-1}^m) = 0. \end{cases}$$

---

tèmes ci-dessus et donne lieu à des remarques analogues qui, *peut-être*, n'ont pas encore été indiquées; en posant

1° Pour $l \neq \theta$, $s = \dfrac{l}{l-\theta}$, on obtient une solution

$$u_i = \rho_i(a+t)^s,$$

a étant une constante arbitraire et les ρ_i déterminés par n équations compatibles dans des cas étendus;

2° Pour $l=\theta$, on obtient des solutions

$$u_i = \rho_i e^{\alpha t},$$

α et les rapports $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \dfrac{\rho_n}{\rho_1}$ étant déterminés par n équations compatibles dans des cas étendus; chaque solution renferme encore une constante arbitraire.

[1] On pourrait aussi prendre pour variables $u_i^{k+1} = w_i$.

Ce système a toujours un système de solutions > 0 et un seul.

Le changement de variables

$$(6\ ter) \qquad u_i = u_1 z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n,\ z_1 = 1)$$

donne

$$du_i = u_1\, dz_i + z_i\, du_1,$$

$$dt = -\frac{du_1}{\lambda_{11} u_1^{m-k}} = \frac{u_i^k\, du_i}{\lambda_{i1} u_1^m + \ldots - \lambda_{ii} u_i^m} = \frac{(u_1\, dz_i + z_1\, du_i) u_1^k z_i^k}{(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^m + \ldots - \lambda_{ii} z_i^m) u_1^m},$$

$$-\frac{du_1}{\lambda_{11}} = \frac{z_i^k (u_1\, dz_i + z_i\, du_1)}{\lambda_{i1} + \lambda_{i2} z_2^m + \ldots - \lambda_{ii} z_i^m},$$

$$du_1 [\lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{i1} + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m)] = \lambda_{11} u_1 z_i^k\, dz_i,$$

$$(7\ ter) \quad -u_1^{m-k-1}\, dt = \frac{du_1}{\lambda_{11} u_1} = \frac{z_i^k\, dz_i}{\lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{i1} + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m)}.$$

Je suppose les valeurs initiales des u_i positives > 0.

D'abord, u_1 étant positif ainsi que u_1^0, $\frac{du_1}{dt}$ décroît, et

$$\frac{1}{(m-k-1)\lambda_{11}} \left[\frac{1}{u_1^{m-k-1}} - \frac{1}{(u_1^0)^{m-k-1}}\right] = t - t_0$$

montre que u_1 tend vers 0 quand t croît indéfiniment. $\frac{dz_i}{dt}$ croît ou décroît encore suivant que z_i, positif, est inférieur ou supérieur à la racine positive unique $\zeta_i > 0$ de

$$\chi_i(z_i) = \lambda_{ii} z_i^m - \lambda_{11} z_i^{k+1} - (\lambda_{i1} + \ldots + \lambda_{i,i-1} z_{i-1}^m);$$

ζ_i est fonction de $z_2, \ldots, z_{i-1}$.

Or

$$u_1^{m-k-1} = \frac{\rho_1^{m-k-1}}{a+t},$$

$$(4\ ter) \qquad u_1 = \frac{\rho_1}{(a+t)^{\frac{1}{m-k-1}}}.$$

On admettra encore que

$$u_j = \frac{\rho_j}{(a+t)^{\frac{1}{m-k-1}}} \qquad (j = 1, 2, \ldots, i-1)$$

soit une solution asymptotique des $i-1$ premières équations (2 *ter*);

$z_{i-1}, \ldots, z_2$ sont aussi voisins qu'on veut de $\frac{\rho_{i-1}}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_2}{\rho_1}$ dès que t est assez grand; z_i reste limité.

Comme dans le cas où $m = 3$, $k = 1$, si $|\chi_i(z_i)| > B_1$ (B_1 fixe) quand t est compris entre t_2 et t_3 assez grands,

$$\left| z_i^k \frac{dz_i}{dt} \right| > B_1 u_1^{m-k-1} = B_1 \frac{\rho_1^{m-k-1}}{a+t},$$

d'où résulte une absurdité. On voit finalement que z_i a pour limite $\frac{\rho_i}{\rho_1}$ quand t croît indéfiniment, et l'on conclut :

Pour m et $k > 0$, $m - k - 1 > 0$, $\lambda_{ij} \geqq 0$, $\lambda_{ii} > 0$, les solutions des équations (2 ter) dont les valeurs initiales sont toutes positives > 0 sont asymptotiques à une solution de la famille de solutions

$$u_i = \frac{\rho_i}{(a+t)^{\frac{1}{m-k-1}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les ρ_i étant déterminés par (5 ter) et > 0 [1].

Enfin, si, pour une valeur initiale de t quelconque, les z_j sont égaux à $\frac{\rho_2}{\rho_1}, \ldots, \frac{\rho_i}{\rho_1}$ quand $j = 2, \ldots, i$, les $u_2, \ldots, u_i$ seront, quel que soit t, de la forme (4 ter), toujours en vertu du théorème de Cauchy.

Je me dispense d'examiner le cas plus général où les λ_{ij} ($j \leqq i$) varient légèrement avec u_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) : il est bien probable que les résultats trouvés quand $m = 3$, $k = 1$ subsistent.

---

[1] Il resterait à examiner et à discuter le cas où certaines des valeurs initiales des u_i sont négatives.

On voit, par tout ce qui précède, l'intérêt que peut présenter la connaissance d'une solution particulière simple d'un système d'équations différentielles; si l'on peut établir que toute une catégorie de solutions lui est asymptotique quand la variable t croît indéfiniment, dès que t est assez grand, on a une idée approchée de toutes ces solutions.

NOTE AU SUJET DE LA DÉVIATION DES GRAVES DANS LA CHUTE LIBRE;

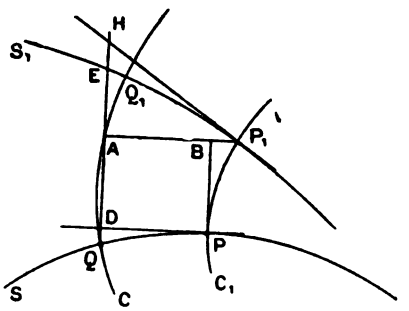
Par M. le Comte de Sparre.

J'ai, dans une Note précédente, donné les équations du mouvement relatif à la surface de la Terre supposée sphérique. Dans une Communication, présentée à l'Académie le 23 janvier, M. Maurice Fouché a fait remarquer que, si l'on suppose que la surface de la Terre est une surface de niveau pour la pesanteur, la déviation dans la chute des graves est la même pour la chute dans un puits que pour celle du haut d'une tour, contrairement à ce qui a lieu dans le cas de la Terre supposée sphérique. Le fait est exact, mais M. Fouché a, dans le cours de sa démonstration, commis une erreur sur le sens de la courbure des lignes de force. Je crois donc qu'il ne sera pas sans intérêt de donner une autre démonstration du même fait.

Pour établir la formule que j'ai en vue je me servirai d'une formule due à Bertrand, mais dont je crois utile de donner une démonstration directe, pour mieux faire saisir ce qui a trait au sens de la concavité.

Soit une première série de courbes S, S_1, S_2, ..., et leurs trajectoires orthogonales C, C_1, C_2, ...

Fig. 1.



Considérons deux courbes infiniment voisines de chacun des deux systèmes S, S_1, C, C_1.

Soient Q, Q_1, P, P_1 leurs points de rencontre. Soient, de plus, PD et PB les tangentes en P à S, et $C_1 P_1$, H la tangente en P_1 à S_1,

P_1BA et QDAEH des parallèles menées par P_1 et Q à PD et PB. L'angle de contingence $d\theta$ de la courbe C_1 est égal à AP_1H, de sorte que l'on a

$$d\theta = \frac{AH}{AP_1};$$

de plus, AH étant du second ordre et AP_1 du premier, nous pourrons, dans le calcul de AH, négliger les termes du troisième ordre et ceux du second dans le calcul de P_1A. Nous aurons d'abord, au second ordre près,

$$AP_1 = AB = PD = PQ.$$

Nous avons ensuite

$$AH = QH - QA = QE + EH - QD - DA,$$

E étant le point de rencontre de QH avec S_1. Mais, comme QH fait un angle infiniment petit avec la tangente en Q à C et que de plus il fait aussi un angle infiniment petit avec la normale à S_1 en un point quelconque de l'arc P_1E, on a, au troisième ordre près,

$$QE = QQ_1,$$

et de plus EH diffère d'un infiniment petit du troisième ordre de la distance du point E à la tangente P_1H à S_1 en P_1. Si donc R est le rayon de courbure de S et $R + dR$ celui de S_1, on a, au troisième ordre près,

$$QD = \frac{\overline{PQ}^2}{2R}, \qquad EH = \frac{\overline{P_1E}^2}{2(R + dR)}.$$

Mais on a, au second ordre près,

$$P_1E = P_1A = PQ,$$

et, par suite, au troisième ordre près,

$$QD = EH,$$

d'ailleurs, toujours au troisième ordre près,

$$DA = PB = PP_1,$$

de sorte que l'on a en définitive

$$d\theta = \frac{QQ_1 - PP_1}{QP},$$

et, par suite, pour le rayon de courbure ρ de la ligne C_1,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{QQ_1 - PP_1}{PQ.PP_1},$$

la concavité étant tournée du côté où les lignes S se rapprochent.

Si l'on a maintenant une série de surfaces de niveau qui soient de révolution, la section de ces surfaces par un plan méridien déterminera des courbes de niveau, S, S_1, ..., et les lignes de force C, C_1, ... comprises dans ce plan méridien seront les trajectoires orthogonales des lignes S, S_1, ...

Désignons par ε la distance des deux courbes de niveau infiniment voisines, S et S_1, et par F la valeur de la force en un point Q de S, qui est normale à S; comme le produit

$$F\varepsilon$$

représente le travail lorsqu'on passe de la courbe S à la courbe S_1, ce produit sera constant, et l'on a

$$F\varepsilon = d\alpha.$$

$\varphi(x, z)$ étant la fonction des forces dans le plan méridien considéré,

$$\varphi(x, z) = \alpha$$

est l'équation de S.

On a donc dans le cas actuel

$$QQ_1 = \frac{d\alpha}{F}, \qquad PP_1 = \frac{d\alpha}{F + dF},$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d\alpha}{F} - \frac{d\alpha}{F + dF}}{PQ\,\frac{d\alpha}{F + dF}} = \frac{dF}{F.PQ}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{F}\,\frac{dF}{ds},$$

ds désignant l'arc de la courbe S et $\frac{dF}{ds}$ la dérivée de F par rapport à s lorsqu'on se déplace sur S.

Mais, si R désigne, comme plus haut, le rayon de courbure de S et $d\lambda$ son angle de contingence, on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{RF}\,\frac{dF}{d\lambda},$$

ce qui est la formule de M. Fouché, mais la démonstration précédente fait voir, sans aucune ambiguïté, que la concavité de la ligne de force est tournée du côté où les lignes de niveau se rapprochent donc du côté *où la force croît*. Il résulte de là qu'à la surface de la Terre la concavité des lignes de force est dirigée *vers le nord*.

Si l'on suppose que la variation de la gravité est exprimée par la formule généralement admise

$$g = g_0 - 0{,}05 \cos^2\lambda,$$

on aura

$$\frac{dF}{d\lambda} = 0{,}1 \sin\lambda \cos\lambda,$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{gR} 0{,}1 \sin\lambda \cos\lambda;$$

de plus, la concavité des lignes de force étant dirigée *vers le nord*, l'effet de l'aplatissement se retranche de celui de la rotation et l'on aura, pour le mouvement en projection sur la tangente au méridien dirigée vers le sud,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega \frac{dy}{dt} \sin\lambda - g\frac{z}{\rho},$$

ou, en prenant

$$\frac{dy}{dt} = \omega g t^2 \cos\lambda,$$

$$z = \frac{1}{2} g t^2,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^2 - g\frac{0{,}1}{gR} \sin\lambda \cos\lambda \frac{1}{2} g t^2,$$

d'où

$$x = \frac{1}{6}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, g t^4 \left(1 - \frac{0{,}1}{4R\omega^2}\right).$$

Soit, en prenant pour R le rayon moyen de la Terre sensiblement,

$$x = \frac{\omega^2}{23} \sin\lambda \cos\lambda\, g t^4.$$

La valeur donnée par M. Fouché est environ cinq fois plus forte.

SUR LA DÉVIATION DES GRAVES ET LES CHAMPS DE FORCE;

Par M. Maurice Fouché.

Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 23 janvier dernier, j'ai montré, à propos de la déviation des graves, que la courbure des lignes de force ne dépend nullement de la variation de la force, dans le sens de sa direction, mais seulement de la variation de l'intensité de la force quand on se déplace sur une surface de niveau (¹). Malheureusement, j'ai laissé échapper, dans cette Note, des erreurs qui m'ont été signalées par M. de Sparre et qu'il importe de rectifier. En premier lieu, la concavité des lignes de force, ainsi que je le montrerai tout à l'heure, et contrairement à ce que j'avais dit, est dirigée du côté où la force *croît*. Dans le champ de la pesanteur, cela fait une déviation vers le nord. De plus, j'avais omis, dans la dérivée de la formule de Clairaut, un facteur 2, ce qui fait que la valeur trouvée pour la déviation due à la courbure des lignes de force est deux fois plus grande que je l'avais annoncé, et qu'elle doit être retranchée de la déviation due à la force centrifuge composée au lieu de lui être ajoutée. Comme cette dernière a une valeur absolue plus grande, il reste une déviation résiduelle qui est dirigée vers le sud et qui est la même, soit qu'on abandonne le corps d'un lieu élevé, soit qu'on le laisse tomber dans un puits.

M. de Sparre a calculé le coefficient de cette déviation dans une Note présentée à la Société mathématique, ce qui me dispense d'insister plus longtemps sur ce sujet particulier. Cependant, je crois qu'il n'est pas inutile de donner quelques indications complémentaires sur ce problème de la déviation des graves qui a occupé de nombreux géomètres, et qui, si je ne me trompe, vient seulement d'être élucidé complètement. Il n'y a rien à dire de la

---

(¹) M. Darboux m'a dit qu'il avait donné dans son enseignement le moyen de trouver le plan osculateur et le rayon de courbure d'une quelconque des trajectoires orthogonales à une famille de surfaces, ce qui est évidemment la même question; mais j'ignore la forme définitive qu'il a donnée à la formule et les détails de la démonstration.

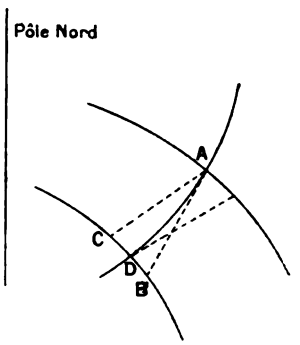
déviation vers l'est, calculée depuis longtemps. La déviation vers le sud a montré plus de difficultés, parce que les auteurs qui l'ont abordée ont cherché à déterminer la courbure des lignes de force de l'attraction, pour composer ensuite cette attraction avec la force centrifuge et avec la force centrifuge composée. De là vient qu'ils ont été conduits à faire des hypothèses sur la constitution interne de la Terre, et à distinguer le cas où le corps tombe sur le sol de celui où il pénètre à l'intérieur du globe, parce que, dans les deux cas, la loi d'attraction est différente. Il semblait pourtant, *a priori*, qu'une différence entre les résultats des deux manières d'opérer était bien invraisemblable, et je dois dire que c'est cette invraisemblance qui m'a déterminé à envisager autrement le problème. En fait, on trouve une différence si l'on fait le calcul dans l'hypothèse où la surface de la Terre n'est pas une surface de niveau ; mais c'est là une supposition inadmissible si l'on opère sur un sol horizontal. Si l'on voulait étudier ce qui se passe dans le cas où l'on ferait l'expérience sur le flanc d'une montagne, il faudrait faire intervenir les attractions locales, ce qui fait que la question perdrait tout intérêt théorique, et, comme elle n'a aucun intérêt pratique à cause de l'extrême petitesse du résultat, je ne pense pas qu'il y ait lieu de s'y arrêter plus longtemps.

L'erreur que j'ai commise est regrettable à un autre point de vue. En disant que la déviation due à la courbure des lignes de force de la pesanteur est dirigée vers le sud, j'ai laissé entendre que sur toute planète, quels que soient l'aplatissement et la gravité à la surface, il y aurait toujours une déviation vers le sud. Puisque, au contraire, la courbure des lignes de force dévie les graves vers le nord, on peut concevoir que, sur une planète autrement constituée que la nôtre, cette cause de déviation l'emporterait sur la force centrifuge composée et produirait une déviation définitive dirigée vers le nord. Cependant, il n'est pas sûr que cela soit possible, parce qu'il y a des relations entre la force centrifuge, l'aplatissement et la gravité. C'est un point à examiner.

Quant au problème en lui-même, il peut être entendu de plusieurs manières différentes. La verticale d'un point est définie par un fil à plomb *infiniment court* attaché en ce point. Un fil à plomb *long* donne la verticale de son point inférieur qui n'a pas la même direction que celle du point d'attache. Soient A le point d'attache,

B le pied de la verticale de A sur la surface de niveau passant par l'extrémité C du fil à plomb long attaché en A et D le pied sur la surface de niveau inférieure de la ligne de force qui passe en A et qui est tangente à la verticale AB. En aucun des points B, C, D la verticale n'est parallèle à celle de A, et, par suite, aucun de ces points n'a la même latitude que A. De là vient qu'il y a quatre déviations différentes à considérer suivant qu'on entend la déviation par rapport au fil à plomb court, au fil à plomb long, par rapport à la ligne de force, ou enfin la déviation en latitude. C'est la déviation par rapport au fil à plomb court qui a fait l'objet des calculs de M. de Sparre et des miens. Il suffit de tracer une figure grossière, la ligne de force étant concave vers le nord, pour reconnaître les faits suivants (*fig.* 1) :

Fig. 1.



1° La verticale du point A (fil à plomb court) tombe au sud de la ligne de force ;

2° La verticale de D s'élève en passant au sud de A. Donc le fil à plomb long tombe au nord de la ligne de force ;

3° La latitude en C (pied du fil à plomb long) est plus faible qu'en A. Donc, le point de niveau inférieur qui a même latitude que A est au nord de C.

De là résulte que, de toutes les espèces de déviations, la plus petite est celle qui est rapportée au fil à plomb court ; viennent ensuite, par ordre de grandeur croissante, celle qui est rapportée à

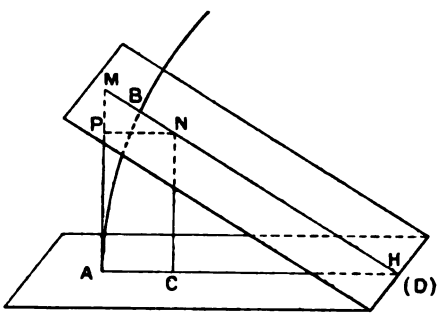
la ligne de force, celle qui est rapportée au fil à plomb long, et enfin la déviation en latitude, la plus grande de toutes.

Remarquons enfin que, si l'on supprimait l'action de la force centrifuge composée, laquelle donne une déviation vers le sud, la trajectoire du mobile serait évidemment comprise entre la ligne de force AD et sa tangente AB [1], d'où il suit que, quelle que soit la constitution de la planète, les trois dernières déviations sont toujours australes; seule la première pourrait peut-être se trouver boréale, comme je l'ai expliqué plus haut.

J'arrive maintenant à la détermination du plan osculateur et du rayon de courbure des lignes de force. La méthode analytique que j'ai suivie pour la seconde de ces déterminations a l'inconvénient de ne pas mettre en évidence le sens de la courbure. Voici une méthode géométrique, d'ailleurs très simple :

Soient A et B (*fig.* 2) deux points infiniment voisins d'une ligne

Fig. 2.



de force. Les plans normaux en A et B se coupent suivant une droite (D) qui est l'axe de la courbure de la ligne de force. Donc, le plan osculateur de cette ligne est perpendiculaire à D. Mais les deux plans normaux sont tangents aux surfaces de niveau qui passent en A et B ; si, par chacun de ces points, on mène des parallèles à D, on aura deux tangentes parallèles aux surfaces de niveau, et telles, par conséquent, que, si l'on se déplace sur l'une des deux surfaces, en suivant une ligne tangente à l'une d'elles, la distance

[1] Cette remarque m'a été faite par M. Lallemant.

du point mobile à l'autre surface ne subira qu'un accroissement du second ordre. Donc chacune de ces droites est tangente à la ligne de force constante tracée sur la surface correspondante, d'où ce théorème :

Le plan osculateur d'une ligne de force est, en chacun de ses points, normal à la ligne de force constante menée par ce point-là sur la surface de niveau correspondante.

On peut ajouter que la trace du plan osculateur en un point d'une ligne de force sur la surface de niveau qui passe en ce point est la direction du maximum de variation de la force sur la surface de niveau. Enfin, il est manifeste que la concavité de la ligne de force est tournée du côté de la droite (D), c'est-à-dire du côté où les surfaces de niveau se rapprochent, ou enfin du côté où la force croît.

Abaissons de A et B les perpendiculaires AH et BH sur (D). AH sera le rayon de courbure ρ de la ligne de force. Prenons, sur AH, un point C infiniment voisin de A, et menons, sur le plan A(D), les deux perpendiculaires AM et CN, limitées au plan B(D).

Traçons enfin NP parallèle à AH. AM et CN représentent, aux infiniment petits près du second ordre, les distances de A et de C à la surface de niveau infiniment voisine. Ce sont deux quantités inversement proportionnelles aux intensités des forces qui s'exercent en A et C et MP en est la différence. Les triangles semblables MNP, MAH donnent

$$\frac{MP}{MA} = \frac{NP}{AH},$$

$NP = AC$ est le déplacement ds sur la droite AH. $AH = \rho$. On aura donc, MP étant un accroissement négatif,

$$-d\log(MA) = \frac{ds}{\rho},$$

ou, puisque MA est inversement proportionnelle à la force F,

$$d\log F = \frac{ds}{\rho},$$

ou encore

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{F}\frac{dF}{ds}.$$

Ainsi, *la courbure de la ligne de force est la dérivée du logarithme de la force prise dans la direction de la surface de niveau où l'accroissement de la force est maximum.*

Si l'on trace dans le plan tangent à la surface de niveau deux axes rectangulaires Ax et Ay, on reconnaîtra sans peine que l'expression

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2$$

est un invariant, c'est-à-dire qu'elle conserve la même valeur quand on change les axes. Il suffit, pour s'en assurer, de remarquer que cette expression représente l'intensité d'une force dans un champ plan dont le potentiel serait F. Si les axes sont dirigés suivant AH et la perpendiculaire à AH, la variation de la force le long de cette perpendiculaire est nulle, et l'invariant se réduit à

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2.$$

Donc l'expression de la courbure se met aussi sous la forme

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{F^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right],$$

qui est celle que j'ai donnée.

Dans la même séance où j'avais présenté ma Note sur la déviation des graves, M. Darboux avait présenté une Note de M. Carrus sur les familles de surface qui admettent des trajectoires orthogonales planes, et l'avait fait suivre de remarques complémentaires dans lesquelles il établit que le problème se ramène, en général, à l'intégration d'une équation aux différentielles partielles du second ordre, et admet, de plus, une nouvelle intégrale première lorsque les plans des lignes de force sont astreints à passer par un point fixe ou à être parallèles à une droite fixe.

Interprétée dans le langage de la Mécanique, cette intégrale première exprime que les intersections des surfaces de niveau et des surfaces d'égale force sont sur des sphères concentriques dans

le premier cas, sur des plans parallèles dans le second. Il y a peut-être quelque intérêt à faire observer que ce résultat découle immédiatement du théorème relatif aux plans osculateurs des lignes de force.

Si, en effet, celles-ci sont planes, leurs plans seront normaux aux lignes d'égale force tracées sur les surfaces de niveau. Pour être plus précis, disons que chaque ligne d'égale force tracée sur une surface de niveau est une trajectoire orthogonale de tous les plans des lignes de force qui passent par ses divers points. Si donc tous ces plans passent par un point fixe O, leurs trajectoires orthogonales seront situées sur des sphères de centre O. Si les plans sont parallèles à une même droite, leurs trajectoires orthogonales seront dans des plans perpendiculaires à cette droite.

Si l'on prend trois axes rectangulaires passant par le point fixe ou un axe des x parallèle à la direction fixe, F désignant la force, et v le potentiel, on aura dans le premier cas

$$F = \varphi(x^2 + y^2 + z^2, v),$$

et dans le second

$$F = \varphi(x, v),$$

puisque la force ne varie pas quand, v restant constant, on reste sur une même sphère ayant son centre à l'origine, ou sur un plan perpendiculaire à Ox. Ces équations sont les intégrales premières dont il vient d'être question.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 AVRIL 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Hedrick, présenté par MM. Darboux et Borel; M. Ouivet, présenté par MM. Raffy et Estanave.

Communications :

M. Fouché : *Sur les champs de force où les lignes de force sont planes.*

M. Hadamard : *Sur le problème de Cauchy pour les équations linéaires du second ordre dans le cas d'un nombre pair de variables.*

SÉANCE DU 13 AVRIL 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BIOCHE.

Communications :

M. D. André : *Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque.*

M. Bioche : *Sur les surfaces algébriques qui admettent comme ligne asymptotique une biquadratique de quatrième classe.*

SÉANCE DU 4 MAI 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Lebesgue : *Sur les développantes successives d'une courbe plane et leur limite.*

M. Borel présente quelques observations sur la définition de la convexité, à propos de la Communication précédente.

M. Bernstein : *Sur la déformation des surfaces à courbure positive et celle des surfaces à courbure négative.*

M. Borel : *Sur les principes de la théorie des ensembles.*

M. Lebesgue présente quelques observations sur le même sujet.

SÉANCE DU 18 MAI 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BLUTEL.

Communications :

M. Fatou : *Caractères de convergence des séries trigonométriques.*

M. Raffy : *Sur certaines surfaces dont la définition est invariante relativement à la transformation conforme par normales parallèles.*

M. Rémoundos adresse une Note *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes.*

M. Autonne adresse un Mémoire *Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace à $n - 1$ dimensions.*

SÉANCE DU 1er JUIN 1905.

PRÉSIDENCE DE M. GRÉVY.

Communications :

M. Bernstein : *Sur le calcul des limites de Cauchy.*

M. Grévy : *Sur la détermination des fonctions arbitraires dans la solution d'une équation aux dérivées partielles.*

SÉANCE DU 15 JUIN 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Pfeiffer, présenté par MM. Picard et Sélivanoff; M. Maluski, présenté par MM. Baire et Lebel.

Communications :

M. Raffy : *Sur les caractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.*

M. Bricard : *Sur les systèmes linéaires, ponctuels et tangentiels, de quadriques, à trois paramètres.*

M. Suchar : *Sur une transformation réciproque en Mécanique.*

M. Bernstein : *Sur le prolongement analytique des fonctions.*

M. Goursat adresse un Mémoire *Sur le problème de Monge.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LES SOMMES DES NOMBRES, PRIS DE QUATRE EN QUATRE, DES COMBINAISONS RÉGULIÈRES D'ORDRE QUELCONQUE;

Par M. Désiré André.

1. En étudiant les nombres des permutations alternées (1), M. Estanave avait été conduit, vers la fin de 1902, à considérer les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons simples de m objets. Il était arrivé, relativement à ces sommes, à plusieurs congruences remarquables, qu'il avait découvertes par l'observation, démontrées en toute rigueur, et finalement énoncées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (2). C'est l'examen de quatre d'entre elles qui m'a amené à m'occuper des sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons simples de m objets.

Dans une lettre insérée presque entièrement au même Recueil (3), j'ai donné sur ces sommes, dans le cas des combinaisons simples, un théorème dont les congruences de M. Estanave ne sont que des corollaires immédiats. Je me propose, dans le présent travail, d'exposer les résultats que j'ai obtenus en étudiant ces mêmes sommes, non plus dans le cas des combinaisons simples, mais dans le cas des combinaisons régulières d'ordre quelconque. Le plus

---

(1) J'ai fait connaître la notion et les propriétés des permutations alternées dans une Note et un Mémoire : *Développements de* sec x *et de* tang x (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVIII, 1879, p. 965-967); *Sur les permutations alternées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VII, 1881, p. 167-184).

(2) Questions 212 et 213, t. X, 1903, p. 34.

(3) T. X, 1903, p. 189-192.

important de ces résultats est un théorème très vaste, dont celui que j'ai donné pour les combinaisons simples n'est que le premier cas particulier.

2. J'ai appelé, il y a longtemps [1], *combinaisons régulières d'ordre a* de m objets distincts pris n à n, celles des combinaisons de ces m objets, n à n, où chaque objet peut être répété jusqu'à a fois, mais non pas davantage. Les combinaisons simples sont évidemment les combinaisons régulières d'ordre 1; les combinaisons complètes, celles d'ordre n. J'ai désigné par $(m, n)_a$ le nombre des combinaisons régulières, d'ordre a, de m objets distincts pris à n, en convenant de regarder $(m, 0)_a$ comme égal à l'unité.

Ces nombres $(m, n)_a$ peuvent être disposés en un triangle où les lignes correspondent aux valeurs 1, 2, 3, ... de m; et les colonnes, aux valeurs 0, 1, 2, ... de n. Chaque élément de ce triangle est égal à celui qui est juste au-dessus, plus les a éléments placés à la gauche de celui-ci. A chaque valeur de a correspond un triangle; dans le cas où a est égal à 1, ce triangle n'est autre chose que celui de Pascal; aussi ai-je proposé [2] d'appeler tous ces triangles *les triangles de Pascal des différents ordres*.

Considérons le triangle d'ordre a, et, dans ce triangle, la ligne de rang m. Elle nous présente $ma+1$ termes, qui sont les nombres

$$(m, 0)_a, \quad (m, 1)_a, \quad (m, 2)_a, \quad \ldots, \quad (m, ma)_a.$$

Si nous additionnons ces termes de quatre en quatre de toutes les manières possibles, nous obtenons quatre sommes que nous représentons par les symboles

$$S^0_m, \quad S^1_m, \quad S^2_m, \quad S^3_m,$$

l'indice supérieur n'étant que la valeur de n dans le terme par lequel on commence l'addition.

Dans le triangle d'ordre a, chaque ligne donne ainsi quatre

---

(1) *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. V, 1876, p. 155-198).

(2) *Liste et résumé de mes principaux travaux mathématiques*, p. 17 (1 vol. in-8° raisin, Paris, Gauthier-Villars, 1904).

sommes. Placées les unes sous les autres, ces sommes forment le rectangle

$$\begin{array}{cccc} S_1^0, & S_1^1, & S_1^2, & S_1^3, \\ S_2^0, & S_2^1, & S_2^2, & S_2^3, \\ S_3^0, & S_3^1, & S_3^2, & S_3^3, \\ S_4^0, & S_4^1, & S_4^2, & S_4^3, \\ S_5^0, & S_5^1, & S_5^2, & S_5^3, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array}$$

dont les quatre colonnes s'étendent indéfiniment vers le bas. C'est ce rectangle que nous allons étudier, d'abord dans ses éléments, ensuite dans ses lignes, et enfin dans ses colonnes.

3. Comme je l'ai démontré par des raisonnements combinatoires très simples ([1]), les nombres des combinaisons régulières d'ordre a de m objets, c'est-à-dire les éléments constituant la $m^{\text{ième}}$ ligne de notre triangle, ne sont autres choses que les coefficients des puissances successives de x dans le développement de la $m^{\text{ième}}$ puissance du polynome

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^a.$$

Si donc je désigne ce polynome par $\varphi(x)$, ce sont les coefficients du développement de $\varphi^m(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, et les sommes

$$S_m^0, \quad S_m^1, \quad S_m^2, \quad S_m^3$$

sont les résultats qu'on obtient en additionnant de quatre en quatre les coefficients de ce même développement.

Or, si nous appelons r l'une quelconque des racines quatrièmes de l'unité, nous avons, comme on le voit sans peine, les quatre égalités suivantes

$$4S_m^0 = \sum r^4 \varphi^m(r), \qquad 4S_m^2 = \sum r^2 \varphi^m(r),$$

$$4S_m^1 = \sum r^3 \varphi^m(r), \qquad 4S_m^3 = \sum r \varphi^m(r),$$

([1]) *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications*, déjà cité, p. 189.

chaque $\sum$ s'étendant aux quatre racines quatrièmes de l'unité.

Il est, d'ailleurs, évident que les seconds membres de toutes ces égalités sont des fonctions symétriques de ces quatre racines et, par conséquent, que l'on doit pouvoir facilement en calculer, sous forme explicite, les valeurs respectives.

4. Représentons par i l'imaginaire $\sqrt{-1}$. Les quatre racines quatrièmes de l'unité seront

$$+1, \quad -1, \quad +i, \quad -i.$$

La première opération à effectuer sera donc de calculer les valeurs des expressions

$$\varphi(+1), \quad \varphi(-1), \quad \varphi(+i), \quad \varphi(-i),$$

valeurs qui dépendent de la forme du nombre a. Cette forme est forcément l'une des suivantes

$$4\alpha+1, \quad 4\alpha+2, \quad 4\alpha+3, \quad 4\alpha+4,$$

la lettre α désignant un entier quelconque, égal ou supérieur à zéro.

Lorsque a est de la forme $4\alpha+1$, les valeurs considérées sont respectivement

$$a+1, \quad 0, \quad 1+i, \quad 1-i.$$

Lorsque a est de la forme $4\alpha+2$, elles sont

$$a+1, \quad +1, \quad +i, \quad -i.$$

Lorsque a est de la forme $4\alpha+3$, elles sont

$$a+1, \quad 0, \quad 0, \quad 0.$$

Enfin, lorsque a est de la forme $4\alpha+4$, elles sont

$$a+1, \quad +1, \quad +1, \quad +1.$$

5. Nous appuyant : sur les résultats que nous venons d'obtenir, sur les formules qui nous donnent

$$4S^0_m, \quad 4S^1_m, \quad 4S^2_m, \quad 4S^3_m$$

en fonction des racines quatrièmes de l'unité, et sur les quatre

identités suivantes

$$(1+i)^m + (1-i)^m = 2(\sqrt{2})^m \cos m\frac{\pi}{4},$$

$$-i(1+i)^m + i(1-i)^m = 2(\sqrt{2})^m \sin m\frac{\pi}{4},$$

$$(\ +i)^m + (\ -i)^m = 2\cos m\frac{\pi}{4},$$

$$-i(\ +i)^m + i(\ -i)^m = 2\sin m\frac{\pi}{4},$$

nous obtenons facilement, pour toutes les formes du nombre a, les valeurs de

$$4S^0_m,\quad 4S^1_m,\quad 4S^2_m,\quad 4S^3_m.$$

Si a est de la forme $4\alpha+1$,

$$4S^0_m = (a+1)^m + 2(\sqrt{2})^m \cos m\frac{\pi}{4},$$

$$4S^1_m = (a+1)^m + 2(\sqrt{2})^m \sin m\frac{\pi}{4},$$

$$4S^2_m = (a+1)^m - 2(\sqrt{2})^m \cos m\frac{\pi}{4},$$

$$4S^3_m = (a+1)^m - 2(\sqrt{2})^m \sin m\frac{\pi}{4}.$$

Si a est de la forme $4\alpha+2$,

$$4S^0_m = (a+1)^m + 1 + 2\cos m\frac{\pi}{4},$$

$$4S^1_m = (a+1)^m - 1 + 2\sin m\frac{\pi}{4},$$

$$4S^2_m = (a+1)^m + 1 - 2\cos m\frac{\pi}{4},$$

$$4S^3_m = (a+1)^m - 1 - 2\sin m\frac{\pi}{4}.$$

Si a est de la forme $4\alpha+3$,

$$4S^0_m = 4S^1_m = 4S^2_m = 4S^3_m = (a+1)^m.$$

Si a enfin est de la forme $4\alpha+4$,

$$4S^0_m = (a+1)^m + 3,$$
$$4S^1_m = 4S^2_m = 4S^3_m = (a+1)^m - 1.$$

6. Afin de permettre quelques vérifications numériques de ces formules, et de donner une idée des rectangles que nous étudions, je vais transcrire ici les commencements des rectangles d'ordres 1, 2, 3, 4, c'est-à-dire des rectangles les plus simples parmi ceux dont les ordres sont respectivement compris dans les formes $4\alpha+1$, $4\alpha+2$, $4\alpha+3$, $4\alpha+4$ du nombre a.

Voici le commencement du rectangle d'ordre 1 :

1	1	0	0
1	2	1	0
1	3	3	1
2	4	6	4
6	6	10	10
16	12	16	20
36	28	28	36
72	64	56	64
"	"	"	"

Voici celui du rectangle d'ordre 2 :

1	1	1	0
2	2	3	2
7	6	7	7
21	20	20	20
61	61	61	60
182	182	183	182
547	546	547	547
1641	1640	1640	1640
"	"	"	"

Voici celui du rectangle d'ordre 3 :

1	1	1	1
4	4	4	4
16	16	16	16
64	64	64	64
256	256	256	256
"	"	"	"

Voici enfin celui du rectangle d'ordre 4 :

2	1	1	1
7	6	6	6
32	31	31	31
157	156	156	156
782	781	781	781
"	"	"	"

7. Si nous examinons attentivement, soit sur nos formules, soit sur nos rectangles numériques, les quatre valeurs de

$$S_m^0,\ S_m^1,\ S_m^2,\ S_m^3,$$

c'est-à-dire les quatre nombres formant la $m^{\text{ième}}$ ligne de notre rectangle, nous constatons les résultats suivants :

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 1$, *ces quatre valeurs sont égales deux à deux si m est impair; au contraire, si m est pair, il y en a deux d'égales et deux d'inégales;*

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 2$, *trois des quatre sommes sont toujours égales entre elles, la quatrième étant égale à leur valeur commune, plus* 1 *si m est pair, moins* 1 *si m est impair;*

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 3$, *les quatre valeurs* S_m^0, S_m^1, S_m^2, S_m^3 *sont, quel que soit m, toujours égales entre elles;*

Enfin, lorsque a est de la forme $4\alpha + 4$, *les trois dernières sommes sont toujours égales entre elles, la première étant toujours égale à leur valeur commune augmentée de l'unité.*

Le plus remarquable de ces résultats nous paraît être celui qui se présente lorsque a est de la forme $4\alpha + 3$, puisque, dans ce cas, nos quatre sommes sont égales. Ce résultat se rapproche beaucoup d'un théorème que nous avons publié autrefois (¹) en l'énonçant ainsi :

Les termes, pris de $a + 1$ *en* $a + 1$ *dans la suite des nombres des combinaisons régulières d'ordre a, ont une somme cons-*

(¹) *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications,* déjà cité, p. 167.

tante, quel que soit celui des $a+1$ premiers termes par lequel on commence.

Quoi qu'il en soit, tous les résultats qui précèdent se démontrent en toute rigueur à l'aide de nos formules (5). Mais il est à remarquer que plusieurs d'entre eux n'appartiennent point exclusivement à nos développements; ils se retrouvent pour les sommes des termes, pris de quatre en quatre, dans toutes les suites de nombres où les termes équidistants des extrêmes sont constamment égaux entre eux.

Comme on peut le voir, en effet, d'une manière très simple, si l'on appelle t le nombre des termes d'une quelconque de ces suites :

Lorsque t est impair, deux des quatre sommes sont toujours égales entre elles, les deux autres étant, en général, différentes;

Lorsque t est pair, les quatre sommes sont égales deux à deux.

8. Partant des expressions trouvées précédemment (5), dans le rectangle d'ordre a, pour les quatre sommes

$$4S_m^0,\quad 4S_m^1,\quad 4S_m^2,\quad 4S_m^3,$$

nous en déduisons sans peine les expressions de

$$4S_{m+4}^0,\quad 4S_{m+4}^1,\quad 4S_{m+4}^2,\quad 4S_{m+4}^3.$$

Comparant ces nouvelles expressions chacune à chacune avec les précédentes, nous arrivons aux résultats suivants :

Lorsque a est de la forme $4\alpha+1$,

$$4(S_{m+4}^j+4S_m^j)=(a+1)^m[(a+1)^4+4],$$

quelle que soit la valeur de m, et quel que soit aussi celui des nombres 0, 1, 2, 3 *que représente l'indice supérieur j;*

Lorsque a est de l'une quelconque des trois formes $4\alpha+2$, $4\alpha+3$, $4\alpha+4$,

$$4(S_{m+4}^j-S_m^j)=(a+1)^m[(a+1)^4-1],$$

égalité qui subsiste, comme la précédente, pour toutes les valeurs possibles des indices m et j.

Ces deux égalités établissent, on le voit, des relations simples entre les nombres figurant dans les lignes, prises de quatre en quatre, de notre rectangle d'ordre a. Nous allons les étudier l'une après l'autre en commençant par la plus simple, c'est-à-dire par la seconde.

9. Considérons la relation générale

$$4(S'_{m+4} - S'_m) = (a+1)^m[(a+1)^4 - 1],$$

où a est de l'une des trois formes $4\alpha + 2$, $4\alpha + 3$, $4\alpha + 4$.

D'abord, quel que soit m, son second membre est divisible par 5. Il en est évidemment ainsi, en effet, lorsque $a + 1$ est divisible par 5; et, lorsqu'il ne l'est pas, comme il est alors premier avec 5, le crochet est divisible par 5, d'après le théorème de Fermat.

Supposons a de la forme $4\alpha + 2$ ou $4\alpha + 4$. Dans chacun de ces cas, $a + 1$ est impair; le crochet qui figure au second membre est le produit des trois facteurs pairs

$$(a+1)^2 + 1, \quad a + 2, \quad a;$$

donc ce second membre, quel que soit m, est divisible par 8.

Lorsque a est de la forme $4\alpha + 3$, le binome $a + 1$ peut s'écrire $4\alpha + 4$ ou $4(\alpha + 1)$, et il y a deux cas à distinguer suivant que $\alpha + 1$ est pair ou impair. Si $\alpha + 1$ est pair, $(a+1)^m$ est, pour toute valeur de m, divisible par 8; si $\alpha + 1$ est impair, $(a+1)^m$ n'est divisible par 8 que quand m dépasse l'unité.

Il suit de tout cela que, dans les divers cas considérés, le premier membre de notre seconde relation est toujours divisible par 40; et, par conséquent, que la différence

$$S'_{m+4} - S'_m$$

est toujours, dans ces mêmes cas, divisible par 10.

10. Revenons à notre première égalité

$$4(S'_{m+4} + 4S'_m) = (a+1)^m[(a+1)^4 + 4].$$

Elle suppose, nous l'avons vu, que a est de la forme $4\alpha + 1$, et, par conséquent, que $a + 1$ est toujours pair.

Il s'ensuit immédiatement que son second membre est toujours, quel que soit m, divisible par 8. En effet, le premier facteur $(a+1)^m$ est toujours divisible par 2, et le second, qui n'est autre que le crochet, est toujours divisible par 4.

Ce même second membre est toujours aussi divisible par 5. Il l'est, en effet, évidemment, si $a+1$ est un multiple de 5; et, quand $a+1$ n'est pas un multiple de 5, le crochet en est un, car il peut s'écrire

$$(a+1)^4 - 1 + 5,$$

et, dans ce trinome, l'ensemble des deux premiers termes est divisible par 5, d'après le théorème de Fermat.

Ainsi, quel que soit m, le second membre de notre égalité est divisible par 40; et par conséquent l'expression

$$S^j_{m+4} + 4S^j_m$$

est toujours un multiple de 10.

On en conclut immédiatement, quel que soit m, que S^j_{m+4} est toujours pair; ou bien, ce qui revient au même, que S^j_m est pair pour toutes les valeurs de m supérieures à 4. Mais, comme on peut le voir par le calcul, sur les expressions (5) de S^0_m, S^1_m, S^2_m, S^3_m qui correspondent à la forme $4\alpha+1$ de a, il se trouve que S^j_4 est toujours pair. Nous pouvons donc dire que S^j_m est pair pour toutes les valeurs de m supérieures à 3.

Cela posé, remarquons que notre égalité

$$S^j_{m+4} + 4S^j_m = \text{mult. de } 10$$

peut s'écrire

$$S^j_{m+4} - S^j_m = \text{mult. de } 10 - 5S^j_m.$$

Pour toutes les valeurs de m supérieures à 3, la somme S^j_m est paire. Donc le nouveau second membre est divisible par 10. Donc, pour toutes les valeurs de m supérieures à 3, la différence

$$S^j_{m+4} - S^j_m$$

est un multiple de 10.

11. Conservant toujours aux lettres a, m, j les significations que nous leur avons respectivement attribuées, nous pouvons ré-

sumer, de la manière suivante, tous les résultats que nous venons d'obtenir :

1° *Si a est de l'une des formes* $4\alpha + 2$ *ou* $4\alpha + 4$, *la différence*

$$S^j_{m+4} - S^j_m$$

est un multiple de 10, *pour toutes les valeurs de* m;

2° *Si a est de la forme* $4\alpha + 3$ *et que* $\alpha + 1$ *soit pair, la même différence est un multiple de* 10, *pour toutes les valeurs de* m;

3° *Si a est encore de la forme* $4\alpha + 3$, *mais que* $\alpha + 1$ *soit impair, cette même différence est un multiple de* 10, *pour toutes les valeurs de m supérieures à l'unité;*

4° *Enfin, si a est de la forme* $4\alpha + 1$, *cette même différence est un multiple de* 10, *pour toutes les valeurs de m supérieures à* 3.

Négligeant les valeurs 1, 2, 3 du nombre m, nous pouvons donc énoncer ce théorème unique :

Théorème. — *Pour toutes les valeurs de m supérieures à* 3, *et quel que soit l'ordre a, la somme* S^j_{m+4} *est congrue à la somme* S^j_m, *selon le module* 10.

Comme ce module 10 est précisément la base de notre numération, ce théorème peut encore s'énoncer ainsi :

Les valeurs numériques de S^j_{m+4} *et de* S^j_m *finissent toujours par le même chiffre.*

Et c'est ce qui explique que les congruences particulières de M. Estanave aient été découvertes par la simple observation.

12. Le théorème que nous venons d'énoncer est tout à fait général : il ne dépend ni de a, ni de j, et il suppose simplement que m soit supérieur à 3. Il comprend celui que nous avions donné autrefois pour les combinaisons simples. Il établit, pour les lignes de notre rectangle, prises de quatre en quatre, une sorte de périodicité, analogue à celle que nous présentent les suites illimitées de nombres entiers, soit en progression arithmétique, soit en progression géométrique.

Ce théorème général, d'ailleurs, pourrait lui-même être généralisé. Au lieu de considérer les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque, on pourrait considérer les sommes de ces mêmes nombres, pris de p en p. Au lieu de prendre, dans le rectangle formé de ces sommes, les lignes de quatre en quatre, on les pourrait prendre de q en q, sans supposer que q fût égal à p. En opérant alors comme nous venons de le faire, et par des moyens pour ainsi dire identiques, on obtiendrait des résultats analogues à ceux qui précèdent; on arriverait à des congruences nouvelles : par exemple, si p était égal à 3, et q à 6, à des congruences de module 7. Seulement, ces congruences nouvelles, qu'on trouverait par le calcul, n'auraient pas, en général, pour module la base 10 de notre numération. L'observation, non aidée du calcul, serait impuissante à les déceler.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$;

Par M. de Montcheuil.

Soient S *une surface quelconque,* ρ *le segment qui relie ses centres de courbure,* x, y, z *les coordonnées de sa surface moyenne; on a tout le long des lignes de cette dernière surface correspondant aux lignes ombilicales de* S

$$d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

En effet, ξ, u, u_1 désignant les coordonnées d'O. Bonnet relatives à S; R, R′ ses rayons de courbure; ds l'élément linéaire de la surface moyenne, on vérifie la relation

$$ds^2 = \left[d\left(\frac{R+R'}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{R-R'}{1+uu_1}\right)^2 du\, du_1 \text{ (1)}.$$

D'où, pour $R = R'$,

$$\left[d\left(\frac{R+R'}{2}\right)\right]^2 = d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

---

(1) *La développée moyenne et les surfaces applicables* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI, 1903).

Il suffira donc de se donner une surface S quelconque et de déterminer ses lignes ombilicales pour obtenir des expressions sans signe de quadrature des coordonnées et de l'arc d'une courbe quelconque de l'espace.

On obtiendra les courbes réelles en choisissant pour S une surface réelle à lignes ombilicales réelles.

Si nous définissons S par l'équation

$$\zeta = uF_1 + u_1 F + \Phi + \Phi_1 ;$$

F, Φ désignant deux fonctions quelconques de u; F_1, Φ_1 deux fonctions de u_1; F', Φ', F'_1, Φ'_1 leurs dérivées, on obtient le système de formules

$$\begin{aligned} x &= uF' - F - \Phi', \\ y &= i(F - uF' - \Phi'), \\ z &= \Phi - u\Phi' - F', \\ s &= \Phi - u\Phi' + F'. \end{aligned}$$

On trouve pour les courbes réelles

$$\begin{aligned} x &= \alpha\theta - A', \\ y &= \beta\theta - B', \\ z &= \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}\right)\theta - \alpha A' - \beta B' + A + B, \\ s &= \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)\theta - \alpha A' - \beta B' + A + B, \end{aligned}$$

A, B désignant ici des fonctions respectives de α, β. Ces variables s'expriment en fonction de θ au moyen des relations

$$A'' = B'' = \theta.$$

Il faudra prendre pour A, B deux fonctions réelles permettant d'exprimer α, β par des fonctions réelles de θ.

Des relations précédentes on déduit le système

$$\frac{dx}{2\alpha} = \frac{dy}{2\beta} = \frac{dz}{\alpha^2 + \beta^2 - 1} = \frac{ds}{\alpha^2 + \beta^2 + 1},$$

qui permet de déterminer aisément les courbes de l'espace analogues aux *courbes de direction* étudiées par Laguerre.

SUR LES DROITES FONDAMENTALES DANS LES COLLINÉATIONS DE L'ESPACE A $n-1$ DIMENSIONS;

Par M. Léon Autonne.

Si l'on considère $2n$ variables x_i et u_i, $\{i=1, 2, \ldots, n\}$ comme les coordonnées homogènes d'un point x, ou d'un plan u, dans un espace à $n-1$ dimensions, la substitution linéaire n-aire, $\{j=1, 2, \ldots, n\}$

$$p = \left| x_i \quad \sum_j p_{ij} x_j \right| = | x_i \quad p[x_i] |,$$

de déterminant $|p| \neq 0$, est une collinéation. Le point $p[x]$, ayant les $p[x_i]$ pour coordonnées, est le *point-image par la collinéation* p du point x.

On a, comme on sait, un point *fondamental* x, si x et $p[x]$ coïncident. Une définition analogue donne les plans fondamentaux.

Mettant à profit quelques indications données, d'après Weierstrass, par M. Frobenius, dans son Mémoire *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (*J. f. r. u. a. M.*, t. LXXXIV), j'ai pu [1] mettre p sous une expression *typique* simple, grâce à laquelle les points ou plans fondamentaux s'obtiennent par une règle générale facile.

Toutes ces théories peuvent recevoir de l'extension.

Appliquant au cas de $n-1$ dimensions la terminologie de l'espace ordinaire, $n=4$, on dira qu'une *droite* d_m, de *degré* m et de *classe* $n-m$, est l'intersection de $n-m$ plans. d_m est aussi le lieu des points x, qui dépendent linéairement de m points donnés b_g, $\{g=1, 2, \ldots, m\}$, $m<n$,

$$x_i = \sum_g t_g b_{gi} \qquad t_g = \text{param. variable.}$$

Un point est une d_1. Un plan est une d_{n-1}.

---

[1] *Sur le connexe linéaire dans l'espace à $n-1$ dimensions* (*Comptes rendus*, 9 mai 1904). — *Sur les formes mixtes* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1905, Ire Partie).

Une droite d_m sera *fondamentale* pour la collinéation p, si d_m est invariante par p, autrement dit : *d_m est le lieu, à la fois, du point x et du point $p[x]$.*

Le travail ci-après résout complètement le problème relatif à la construction des droites fondamentales. On fait encore usage de la forme typique de p.

La règle est analogue à celle qui a été donnée déjà pour les points et plans fondamentaux, mais, bien entendu, un peu plus compliquée.

1. Dans un espace à $n-1$ dimensions prenons

$$(j = 1, 2, \ldots, n),$$

un point x par ses n coordonnées homogènes x_j, coordonnées *ponctuelles;*	un plan u par ses n coordonnées homogènes u_j, coordonnées *planaires.*

m points b_g $(m \leqq n)$ sont dits *linéairement distincts* ou *indépendants,* si l'on ne peut satisfaire aux relations

$$(0) \qquad \sum_g t_g b_{gj} = 0 \qquad \begin{cases} g = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

qu'en égalant tous les t_g à zéro, les b_{gj} étant les coordonnées du point b_g. Il faut et il suffit évidemment pour cela que le tableau à m lignes et à n colonnes

$$b = |b_{gj}| = \left\| \begin{matrix} b_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{g1} & \ldots & b_{gj} & \ldots & b_{gn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

ait son rang maximum m.

Si au contraire on peut satisfaire aux relations (0) sans annuler tous les t_g, il y aura, entre les m points b_g, une *dépendance linéaire.*

2. Considérons m points b_g linéairement distincts et m para-

mètres variables t_g. Le lieu du point x tel que

$$x_j = \sum_g t_g b_{gj}$$

sera, *par définition*, une *droite* d_m, de *degré* m.

On peut dire aussi que le point x est sur l'intersection de $n - m$ plans et que la droite d_m a pour degré m et pour *classe* le nombre $n - m$.

Un point est une droite d_1 de degré 1 et de classe $n - 1$. Un plan est une droite d_{n-1} de degré $n - 1$ et de classe 1.

3. Désignons, ce qui ne peut faire ambiguïté, par une même lettre p :

I. Une matrice n-aire

$$p = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \qquad \{i, j = 1, 2, \ldots, n\};$$

II. Une forme bilinéaire

$$p(x; u) = \sum_{ij} p_{ij} u_i x_j.$$

III. Une collinéation ou substitution linéaire

$$p = \left| x_i \quad \sum_j p_{ij} x_j \right| = | x_i \quad p[x_i] |;$$

J'écrirai plus simplement

$$p = | x \quad p[x] |$$

et je dirai que le point $p[x]$ ayant pour coordonnées les

$$p[x_i] = \sum_j p_{ij} x_j,$$

est le *transformé* ou l'*image* par p du point x.

L'équation symbolique

$$p[x] = 0$$

sera, par définition, équivalente aux n équations

$$p[x_i] = \sum_j p_{ij} x_j = 0.$$

4. Prenons une substitution p de déterminant $|p| \neq 0$. On sait qu'un point x, ou un plan u, est *fondamental* si son image par p se confond avec lui-même.

$$p[x] = \rho x \qquad \text{ou} \qquad p[u] = \rho u.$$

Le point fondamental x est invariant par rapport à p. En vertu de la relation

$$\rho x - p[x] = 0,$$

on voit qu'il y a dépendance linéaire (1) entre les *deux* points x et $p[x]$.

Je me propose de généraliser cette notion de point fondamental.

5. Une droite d_m de degré m sera *fondamentale* pour la substitution linéaire n-aire p, si d_m est invariante vis-à-vis de p. Autrement dit p ne fait que permuter entre eux les différents points de d_m.

La construction des fondamentales d_m est le principal objet du présent travail.

6. Considérons une d_m. Elle est définie par m quelconques de ses points, pourvu qu'ils soient linéairement indépendants. Réciproquement une d_m ne peut contenir plus de m points linéairement indépendants ou distincts.

Prenons maintenant la suite indéfinie de points

$$(\Xi) \qquad p^\sigma[x], \qquad \sigma = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty.$$

Je montrerai plus loin (9) qu'ils sont tous situés sur une droite $\bar{x}$, de degré *fini* h.

Il y aura entre différents points de la suite des dépendances linéaires, de façon que la suite contient seulement h points linéairement distincts.

Une droite $\bar{x}$ est évidemment fondamentale.

7. Soit maintenant une fondamentale d_m quelconque. Si d_m contient le point x, elle contient évidemment toute la droite $\overline{x}$, qui compte pour h points linéairement distincts. d_m est évidemment une collection de droites $\overline{x}$ et l'on a

$$m = \sum h.$$

Notre problème revient donc à la construction des droites $\overline{x}$, de degré h.

8. Prenons un polynome

$$f(r) = c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \ldots, \qquad c_0, c_1, \ldots = \text{const.}$$

Frobenius (p. 9 du Mémoire cité) appelle l'expression

$$c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \ldots,$$

fonction entière de la matrice n-aire p et désigne cette expression par $f(p)$.

Puisque dans la suite des points

$$(\Xi) \qquad p^\sigma[x]$$

il n'y a que h points linéairement distincts (6), c'est qu'entre différents points de la suite Ξ existent des relations telles que celle-ci

$$(1) \qquad C_0 p^\alpha[x] + C_1 p^{\alpha+\alpha_1}[x] + \ldots = 0,$$

où les C sont des constantes, tandis que les α sont des entiers *positifs*, puisque l'on peut toujours multiplier le premier membre de (1) par une puissance de p.

Désignons maintenant par $f(r)$ le polynome

$$f(r) = C_0 r^\alpha + C_1 r^{\alpha+\alpha_1} + \ldots,$$

car nous verrons plus loin que la relation (1) ne contient qu'un nombre fini de termes (9), et posons

$$P = f(p).$$

La condition (1) s'écrit

$$(2) \qquad P[x] = 0$$

et entraîne diverses sujétions entre :

les coordonnées du point x;
les coefficients de polynome $f(r)$;
la substitution n-aire p.

Je me propose d'étudier ces sujétions.

9. On sait (Frobenius, p. 26) que toute n-aire p satisfait à une *équation de degré minimum*

$$\psi(p) = 0,$$

où le polynome $\psi(r)$, de degré $n_0 \leqq n$, a l'expression construite plus loin (21). Posons

$$Q = \psi(p);$$

la n-aire Q sera identiquement zéro et, pour *tout* point x, on a

$$Q[x] = e_0 x + e_1 p[x] + \ldots + e_{n_0} p^{n_0}[x] = 0,$$
$$\psi(r) = e_0 + e_1 r + \ldots + e_{n_0} r^{n_0} \qquad (e_{n_0} \neq 0).$$

De plus, pour tout entier σ non négatif, on a

$$p^\sigma = \sum_\tau p^\tau L_{\sigma\tau},$$
$$\tau = 0, 1, \ldots, n_0 - 1; \qquad L_{\sigma\tau} = \text{const.}$$

Tout point $p^\sigma[x]$, $\sigma \geqq 0$, dépend donc linéairement des n_0 points

$$(1) \qquad x, \quad p[x), \quad \ldots, \quad p^{n_0-1}[x].$$

Passons aux points $p^{-\sigma}[x]$, $\sigma > 0$, c'est-à-dire aux points

$$\varpi^\sigma[x] \qquad \text{où} \qquad \varpi = p^{-1}.$$

Dans le polynome $\psi(r)$ on a $e_0 \neq 0$, car, autrement, on pourrait diviser $\psi(p)$ par p, car $|p| \neq 0$, et l'équation $\psi(p) = 0$ aurait son degré inférieur à n_0, ce que nous excluons.

Posons

$$\psi(r) = e_0 + r\pi(r), \qquad \pi(r) = e_1 + e_2 r + \ldots.$$

On a

$$0 = \psi(p) = e_0 E + p\pi(p),$$

E étant la n-aire unité.

Enfin

$$\varpi = p^{-1} = -\frac{1}{e_0}\pi(p).$$

Les points $\varpi^\sigma[x]$ dépendent encore linéairement des n_0 points (1).

Le présent raisonnement montre que :

I. La droite $\bar{x}$ du n° 6 a un degré fini, égal ou inférieur à n_0;

II. Le premier membre de la relation (1) du n° 8 contient un nombre fini de termes.

Je suis maintenant à même d'étudier les conditions (8)

$$P[x] = 0, \qquad P = f(p),$$

$f(r)$ étant un polynome.

10. Désignons par des minuscules grecques des polynomes

$$\alpha(r), \quad \beta(r), \quad \gamma(r), \quad \ldots$$

et par des majuscules latines

$$A = \alpha(p), \qquad B = \beta(p), \qquad C = \gamma(p), \qquad \ldots$$

les n-aires correspondantes, fonctions entières de la n-aire p.

A, B, ... sont échangeables entre elles et tous les calculs de multiplication et d'addition se font suivant les règles de l'Algèbre élémentaire, comme les calculs analogues sur les polynomes $\alpha(r)$, $\beta(r)$, ...

Lemme I. — *Si*

$$\gamma(r) = \alpha(r)\beta(r) \qquad et \qquad B[x] = 0,$$

on a aussi

$$C[x] = 0.$$

En effet

$$C = AB, \qquad C[x] = AB[x] = 0.$$

Ainsi *la condition*

$$C[x] = 0$$

est une conséquence *de la relation*

$$B[x] = 0.$$

Supposons que $\beta(r)$ a un degré supérieur ou égal à celui de $\alpha(r)$. Divisons β par α; nommons $\varpi(r)$ le quotient et $\rho(r)$ le reste,

$$\beta(r) = \varpi(r)\alpha(r) + \rho(r).$$

Lemme II. — *Les deux relations*

$$A[x] = 0 \quad \textit{et} \quad B[x] = 0,$$

si elles coexistent, ont pour conséquence la relation

$$R[x] = 0.$$

On a, en effet,

$$B = PA + R \quad \text{et} \quad 0 = B[x] = (PA + R)[x] = PA[x] + R[x] = R[x],$$

car

$$PA[x] = 0 \quad (\text{lemme I}).$$

On peut recommencer le raisonnement sur les deux relations $A[x] = 0$ et $R[x]$ et sur les deux polynomes $\alpha(r)$ et $\rho(r)$. On continuera jusqu'à ce qu'on parvienne au plus grand commun diviseur $\delta(r)$ de $\alpha(r)$ et $\beta(r)$.

Corollaire. — *Les deux relations* $A[x] = 0$ *et* $B[x] = 0$, *si elles coexistent, sont conséquences de la relation unique* $D[x] = 0$.

En effet, on vient de voir (lemme II) que $D[x] = 0$. Or $A = LD$ et $B = MD$, si $\alpha = \lambda\delta$, $\beta = \mu\delta$, et le raisonnement s'achève par le corollaire du lemme I.

11. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ divers polynomes en r et $\delta(r)$ leur plus grand commun diviseur.

Théorème. — *Les relations* $A[x] = 0$, $B[x] = 0$, $C[x] = 0, \ldots$ *sont, si elles coexistent, conséquences de la relation* unique $D[x] = 0$.

La proposition découle immédiatement du corollaire du lemme II. Remarquons par contre deux choses.

D'abord, dans la présente théorie, il est licite, en vertu du n° **9**, d'introduire seulement des polynomes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ de degré limité, égal ou inférieur à n_0 (**9**).

En second lieu le théorème ne serait pas infirmé si les relations $A[x] = 0$, $B[x] = 0$, ... étaient en nombre illimité ou même infini.

12. Reprenons (9) l'équation

$$\psi(p) = 0$$

de degré minimum à laquelle satisfait p.

Soient un point x de l'espace et une droite $\bar{x}$, qui part de x. On a (8, *in fine*) des relations en nombre illimité

$$(1) \qquad \begin{gathered} P_1[x] = 0, \quad P_2[x] = 0, \quad \ldots, \\ P_1 = F_1(p), \quad P_2 = F_2(p), \quad \ldots, \\ F(r), \quad F_2(r), \quad \ldots = \text{polynomes}. \end{gathered}$$

On a sûrement, pour ce point x là,

$$Q[x] = 0$$

puisque

$$Q = \psi(p) = 0.$$

Nommons $f(r)$ le plus grand commun diviseur des divers polynomes $F(r)$ et du polynome $\psi(r)$ et écrivons

$$P = f(p).$$

Toutes les relations (1) sont conséquences de la relation *unique*

$$P[x] = 0.$$

Dès lors notre problème se décompose en deux problèmes réciproques $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{A}$. *Après avoir choisi, parmi les diviseurs du polynome $\psi(r)$, le polynome $f(r)$ de degré h, trouver à quelles conditions doit satisfaire un point x pour que l'on ait*

$$P[x] = 0, \qquad P = f(p),$$

sans avoir, pour ce même point x, *pour un autre diviseur f_1 de* $\psi(r)$

$$P_1[x] = 0, \qquad P_1 = f_1(p),$$

à moins que le diviseur f_1 ne soit divisible par f.

$\mathfrak{B}$. *Un point x étant donné, trouver parmi les diviseurs de $\psi(r)$ un polynome $f(r)$ de degré minimum h, tel que l'on ait*

$$P[x] = 0, \qquad P = f(p).$$

La solution du problème $\mathfrak{B}$ est exempte d'ambiguïté : si l'on trouvait deux diviseurs f et f_1 du même degré h, ils ne sauraient être distincts, car leur plus grand commun diviseur aurait aussi le degré h.

13. Passons à la construction des droites $\bar{x}$ (6). Une pareille droite est connue dès qu'on possède le point x dont elle est issue.

Donnons-nous un point x et introduisons la suite Ξ (6). Le problème $\mathfrak{B}$, une fois résolu, donne un polynome de degré h

$$f(r) = c_0 + c_1 r + \ldots + c_h r^h$$

diviseur de $\psi(r)$. Entre des points de la suite Ξ existe la relation

$$0 = P[x] = c_0 x + c_1 p[x] + \ldots + c_h p^h[x]$$

qui permet d'exprimer, de proche en proche, tous les points de Ξ linéairement à l'aide des h points

$$x, \quad p[x], \quad \ldots, \quad p^{h-1}[x].$$

Ces derniers points eux-mêmes sont d'ailleurs linéairement distincts, car si l'on avait par exemple

$$0 = P'[x] = c'_0 x + \ldots + c'_{h'} p^{h'}[x], \qquad h' < h,$$

le polynome $f(r)$ fourni par la solution du problème $\mathfrak{B}$ ne serait pas de degré minimum, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc *le degré h du polynome $f(r)$ est précisément aussi le degré de la droite $\bar{x}$ issue du point x.*

Réciproquement, donnons-nous h et cherchons les droites $\bar{x}$ qui ont ce degré, ou, ce qui revient au même, les points x, origines de ces droites $\bar{x}$.

Parmi les diviseurs, de degré h, que possède le polynome $\psi(r)$, choisissons $f(r)$. Le problème $\mathfrak{A}$, supposé résolu, donne tous les points x cherchés.

On a toutes les $\overline{x}$, en passant en revue les degrés h et, pour chaque h, les différents diviseurs de $\psi(r)$ qui ont ce degré.

Il est évident que h ne peut dépasser le degré n_0 de $\psi(r)$.

En résumé : *si l'on sait résoudre les problèmes* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$, *on saura construire toutes les droites* $\overline{x}$.

14. Une droite fondamentale d_m, de degré m, est une collection (7) de droites $\overline{x}$, de degré h, avec $m = \sum h$.

Donnons-nous m et cherchons tous les systèmes d'entiers positifs h tels que

$$m = \sum h, \qquad h \leqq n_0, \qquad n_0 = \text{degré de } \psi(r).$$

On n'a qu'un nombre limité de systèmes.

Les h une fois choisis, on construira, comme il vient d'être dit, les droites $\overline{x}$ dont la collection constitue d_m.

La conclusion est celle-ci : *la construction des droites fondamentales se ramène à la construction des droites* $\overline{x}$, *c'est-à-dire à la résolution des problèmes* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$.

C'est ce dont on va s'occuper, après une discussion préalable d'algèbre élémentaire que voici.

15. Considérons deux suites $\overline{K}$ et $\overline{Z}$ de λ quantités chacune, rangées par ordre croissant d'indices

$$\begin{array}{lllllll} \overline{K} & K_0, & K_1, & \ldots, & K_g, & \ldots, & K_{\lambda-1}, \\ \overline{Z} & z_1, & z_2, & \ldots, & z_\alpha, & \ldots, & z_\lambda. \end{array}$$

Supposons les 2λ quantités K_g et z_α liées par les λ équations Ω

$$\Omega \quad \left\{ \begin{array}{r} K_0 z_1 + \ldots + K_g z_{g+1} + \ldots + K_{\lambda-1} z_\lambda = 0, \\ K_0 z_2 + \ldots + K_g z_{g+2} + \ldots + K_{\lambda-2} z_\lambda = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_0 z_{\lambda-1} + K_1 z_\lambda = 0, \\ K_0 z_\lambda = 0. \end{array} \right.$$

Prenant successivement pour inconnues soit les z, soit les K, on a

les deux matrices λ — aires

$$K = \begin{vmatrix} K_0 & K_1 & K_2 & K_3 & . & K_{\lambda-2} & K_{\lambda-1} \\ 0 & K_0 & K_1 & K_2 & . & \dots & K_{\lambda-2} \\ 0 & 0 & K_0 & K_1 & . & \dots & K_{\lambda-3} \\ . & . & \dots & \dots & . & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & K_0 & K_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K_0 \end{vmatrix}$$

et

$$Z = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & \dots & \dots & z_{\lambda-2} & z_{\lambda-1} & z_\lambda \\ z_2 & z_3 & z_4 & \dots & \dots & z_{\lambda-2} & z_{\lambda-1} & z_\lambda & 0 \\ z_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & z_{\lambda-1} & z_\lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{\lambda-1} & z_\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ z_\lambda & 0 & 0 & . & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Dans K, la g-ième colonne contient les coefficients que possède dans le système Ω l'inconnue z_{g+1}. Dans Z, la α-ième colonne est celle des coefficients que possède, dans Ω, l'inconnue $K_{\alpha-1}$.

16. Discutons la façon dont le système Ω détermine les inconnues z_α. On s'assure aisément de ce qui suit.

Si $K_0 \neq 0$, toutes les z_α sont nulles. Si $K_0 = 0$, mais $K_1 \neq 0$, l'inconnue z_1 ne figure plus dans Ω et reste arbitraire, mais les $\lambda - 1$ autres inconnues sont nulles.

.....

En général : *si la suite* $\overline{K}$ *débute exactement par* σ *zéros,* $\sigma \leqq \lambda$,

$$K_0 = K_1 = \dots = K_{\sigma-1} = 0, \qquad K_\sigma \neq 0,$$

alors les σ *premières inconnues* $z_1, \dots, z_\sigma$ *ne figurent plus dans* Ω *et restent arbitraires, tandis que les* $\lambda - \sigma$ *dernières*

$$z_{\sigma+1}, \quad z_{\sigma+2}, \quad \dots, \quad z_\lambda$$

sont des zéros.

La suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros *au moins,* car le système Ω ne nous apprend rien sur les valeurs de $z_1, \dots, z_\sigma$ et est satisfait indépendamment d'elles.

17. Étudions la façon dont le système Ω détermine les λ inconnues K_g. Une discussion analogue à celle ci-dessus montre ce qui suit :

Si la suite $\overline{Z}$ *se termine exactement par* $\lambda - \sigma$ *zéros*

$$z_\lambda = z_{\lambda-1} = \ldots = \lambda_{\sigma+1} = 0, \qquad z_\sigma \neq 0,$$

alors la suite $\overline{K}$ *débute par* σ *zéros* au moins

$$K_0 = K_1 = \ldots = K_{\sigma-1} = 0,$$

tandis que les $\lambda - \sigma$ *derniers termes de la suite*

$$K_\sigma, \quad K_{\sigma+1}, \quad \ldots, \quad K_{\lambda-1}$$

ne figurent plus dans Ω *et restent indéterminées.*

Les équations Ω ne nous apprennent plus rien sur les valeurs de $K_\sigma, \ldots, K_{\lambda-1}$.

18. Pour résoudre les problèmes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ (12), je supposerai (ce qui ne restreint en rien la généralité) la n — aire p, de déterminant $|p| \neq 0$, ramenée à l'expression *typique* dont j'ai fait usage ailleurs [1] déjà.

Supposons la fonction caractéristique

$$\varphi(r) = |rE - p|$$

de p, où E est la n — aire unité, décomposée en ses *Elementarteiler* ou *successifs*

$$\varphi(r) = \prod (r - l)^\lambda, \qquad n = \sum \lambda,$$

l étant une racine de l'équation caractéristique Θ, $\varphi(r) = 0$.

Au successif $(r - l)^\lambda$ correspondent :

1° Une matrice *partielle* ou *composante* λ — aire L; 2° 2λ variables z_α et w_α $\{\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda\}$ choisies parmi les $2n$ variables x_j et u_j $\{j = 1, 2, \ldots, n\}$.

---

[1] *Sur les connexes linéaires dans l'espace à* $n - 1$ *dimensions* (*Comptes rendus* du 9 mai 1904). — *Sur les formes mixtes* (*Annales de l'Université de Lyon*, 1905) : première Partie du Mémoire.

Nommons $\chi(s)$ un symbole, tel que

$$\begin{cases} \chi(s) = 0, & \text{pour } s \text{ négatif}, \quad s < 0, \\ \chi(s) = 1, & \text{pour } s \text{ positif ou nul}, \quad s \geqq 0. \end{cases}$$

La forme bilinéaire $L(z; w)$ est (3)

$$L(z; w) = \sum_{\alpha} w_\alpha z_\alpha + \sum_{\alpha} w_\alpha z_{\alpha+1} \chi(\lambda - 1 - \alpha).$$

Dans chaque composante L les variables z_α, par exemple, *sont rangées dans un ordre déterminé.*

L'expression typique est, pour la n — aire p,

$$p(x; u) = \sum L(z; w),$$

$\sum$ s'étendant aux diverses composantes L.

Je range dans un même *hypersystème* (l) les diverses composantes où le l est égal à une même racine distincte de l'équation caractéristique.

19. Reprenons le polynome $f(r)$ et la n — aire $P = f(p)$, déjà considérés plus haut (problèmes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$). Puisque, dans l'expression typique, $p = \sum L$, on a

$$P = f(p) = \sum \Lambda, \qquad \Lambda = f(L).$$

Les relations $P[x] = 0$ se traduisent, sur les variables z_α de la composante L, par les relations

$$\Lambda[z] = 0,$$

qu'on a à étudier.

20. On peut écrire

$$L = lE + S,$$

où la n — aire S est, $\{\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda\}$,

$$S = | z_\alpha \quad z_{\alpha+1} \chi(\lambda - 1 - \alpha) |,$$

tandis que E est la n — aire unité. De plus $S^\lambda = 0$.

Un calcul simple montre que

$$\Lambda = f(\mathrm{L}) = f(l\mathrm{E} + \mathrm{S}) = \sum_g \mathrm{K}_g \mathrm{S}^g,$$

$$g = 0, 1, \ldots, \lambda - 1, \qquad \mathrm{K}_g = \frac{1}{g!} \frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g}.$$

Les conditions $\Lambda[z] = 0$ s'écrivent

$$\Lambda[z_\alpha] = \sum_g \mathrm{K}_g z_{\alpha+g} \chi(\lambda - \alpha - g) \qquad \{\alpha = 1, 2, \ldots, \lambda\},$$

puisque

$$\mathrm{S}^g = |z_\alpha \quad z_{\alpha+g} \chi(\lambda - g - \alpha)|.$$

On est conduit entre les 2λ quantités K_g et z_α précisément au système Ω déjà étudié (15, 16, 17).

21. Construisons le polynome $\psi(r)$, de degré n_0, tel que $\psi(p) = 0$ soit l'équation de degré minimum à laquelle satisfait p.

Frobenius (p. 26) enseigne à construire $\psi(r)$. Voici la règle, traduite dans la terminologie actuelle.

Nommons, pour l'hypersystème (l), λ_0 l'ordre maximum des composantes L, $\lambda \leqq \lambda_0$. Il viendra

$$\psi(r) = \prod (r - l)^{\lambda_0}, \qquad n_0 = \sum \lambda_0,$$

la somme et le produit s'étendant aux divers hypersystèmes (l) de p.

Je dirai que dans un hypersystème (l) une composante L est *principale,* si l'ordre λ de L est précisément égal au maximum λ_0.

Un polynome $f(r)$, de degré h, diviseur de $\psi(r)$, est évidemment

$$f(r) = \prod_{0 \leqq \mu \leqq \lambda_0} (r - l)^\mu, \qquad h = \sum \mu,$$

L'exposant μ, que possède dans $f(r)$ le facteur $r - l$, ne peut dépasser l'ordre λ d'une composante principale dans l'hypersystème (l).

22. On a vu (20) que, dans une même composante L, les z_α et les K_g sont liées par le système Ω.

Supposons que :

la suite $\overline{K}$ débute par τ zéros

$$K_0 = \ldots = K_{\tau-1} = 0, \qquad K_\tau \neq 0;$$

la suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros

$$z_\sigma \neq 0, \quad z_{\sigma+1} = \ldots = z_\lambda = 0.$$

Si l'on se donne τ (cas du n° 16) la suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \tau$ zéros *au moins;* par suite $\lambda - \tau \leqq \lambda - \sigma$, $\tau \geqq \sigma$, $\sigma = \tau - \varepsilon$, ε étant un entier non négatif.

Si l'on se donne σ (cas du n° 17), la suite $\overline{K}$ débute par σ zéros au moins, $\sigma \leqq \tau$ et encore $\sigma = \tau - \varepsilon$.

Donc *la formule* $\sigma = \tau - \varepsilon$ *est générale,* à condition bien entendu que $\tau \leqq \lambda$, $\sigma \leqq \lambda$.

23. Comme (20)

$$K_g = \frac{1}{g!}\frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g} \qquad \text{et} \qquad f(r) = \prod (r-l)^\mu,$$

on a

$$\begin{aligned} \tau &= \mu \quad \text{si} \quad \mu \leqq \lambda, \\ \tau &= \lambda \quad \text{si} \quad \mu > \lambda; \end{aligned}$$

ce qu'on exprime par la formule unique

$$(1) \qquad \tau = \mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda),$$

$\chi(s) = 0$ ou 1 suivant que $s < 0$ ou $s \geqq 0$.

Si l'on a affaire à une composante principale (21, *in fine*) $\mu \leqq \lambda$ et $\tau = \mu$. Enfin, pour une composante principale, il vient (22)

$$(2) \qquad \tau = \mu = \sigma + \varepsilon.$$

Problème $\mathfrak{A}$.

24. Le polynome

$$f(r) = \prod (r-l)^\mu, \qquad h = \sum \mu,$$

une fois choisi, on possède les exposants μ, ainsi que les quantités

$$K_g = \frac{1}{g!}\frac{\partial^g f(l)}{\partial l^g}$$

et le nombre τ, du n° 23,

$$\tau = \mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda).$$

Parmi les λ inconnues z_α, les $\lambda - \sigma$ dernières sont nulles, les σ premières arbitraires (cas du n° 16). Enfin $\sigma = \tau - \varepsilon$, $\varepsilon =$ non négatif.

Pour une composante principale $\tau = \mu$, $\sigma = \mu - \varepsilon$.

La solution du problème $\mathfrak{A}$ se formule ainsi : *après avoir choisi le polynome*

$$f(r) = \prod (r - l)^\mu, \qquad h = \sum \mu,$$

c'est-à-dire l'exposant μ *afférent à chaque hypersystème* (l), *on annule, dans la composante* λ — *aire* L *de* (l), *les*

$$(0) \quad \lambda - \tau = \lambda - \{\mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda)\} = (\lambda - \mu)\{1 - \chi(\mu - \lambda)\}$$

dernières variables z_α, *en laissant aux*

$$(1) \qquad \tau = \mu + (\lambda - \mu)\chi(\mu - \lambda)$$

premières des valeurs quelconques.

25. La solution du problème $\mathfrak{A}$ ainsi énoncée répond-elle à l'énoncé du problème donné au n° 12? Autrement dit : existe-t-il, pour le même point x (ou les mêmes z_α), un autre polynome, non divisible par $f(r)$,

$$f_1(r) = \prod (r - l)^{\mu_1},$$

tel que (avec des notations faciles à comprendre) on ait encore

$$A_1[z] = 0, \qquad A_1 = f_1(p)?$$

Non, tant que les z_α, non forcément nulles, conservent des valeurs *quelconques*. Voici comment on s'en assure.

Puisque $f(r)$ ne divise pas $f_1(r)$, on trouvera au moins un hypersystème (l) dans lequel $\mu_1 < \mu$ ou $\mu_1 = \mu - \theta$, $\theta =$ entier positif. Prenons une composante principale L de cet hypersystème (l). On aura à la fois à tenir compte de A et de A_1.

Tenons compte de A. Sont forcément nulles les $\lambda - \tau = \lambda - \mu$ dernières z_α. Les μ premières conservant des valeurs *quelconques*, on fera

$$(1) \qquad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_\mu \neq 0; \qquad z_{\mu+1} = \ldots = z_\lambda = 0.$$

Tenons compte de A_1. La formule (2) du n° 23 donne, avec des notations faciles à comprendre,

$$\sigma_1 = \mu_1 - \varepsilon_1 = \mu - \theta - \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 \geqq 0.$$

On doit faire $z_{\sigma_1} + 1 = 0$, ce qui est contraire à (1), car $\mu \leqq \mu - \theta - \varepsilon_1 + 1$.

On peut se demander si le raisonnement subsiste en particularisant les z_α arbitraires. Cela revient à se donner les z_α et l'on est ramené au problème $\mathfrak{B}$.

Problème $\mathfrak{B}$.

26. Donnons-nous le point x, c'est-à-dire les z_α, et cherchons à construire le polynome $f(r)$, de degré minimum, c'est-à-dire à calculer les exposants μ.

Supposons que dans la composante λ — aire L on ait

$$z_\sigma \neq 0, \qquad z_{\sigma+1} = \ldots = z_\lambda = 0,$$

c'est-à-dire que la suite $\overline{Z}$ se termine par $\lambda - \sigma$ zéros. On possède le nombre σ puisqu'on possède les z_α. On a (n° 24)

$$\tau = \sigma + \varepsilon$$

et, comme $f(r)$ est divisible par $(r - l)^\tau$, $f(r)$ est divisible par $(r - l)^{\sigma+\varepsilon}$. Donc

$$\mu \geqq \sigma.$$

Nommons σ_0 le maximum des nombres σ pour les différentes composantes L de l'hypersystème (l). On a $\mu \geqq \sigma_0$. Comme $f(r)$ doit avoir le degré minimum, on fera $\mu = \sigma_0$. Bien entendu, le μ ainsi calculé doit être $\mu \leqq \lambda_0$, $\lambda_0 =$ ordre maximum des composantes L de (l).

D'ailleurs, comme $0 \leqq \sigma \leqq \lambda$, $\sigma \leqq \sigma_0$, $\lambda \leqq \lambda_0$, la condition $\mu = \sigma_0 \leqq \lambda_0$ peut être satisfaite.

La solution du problème $\mathfrak{B}$ se formule donc ainsi : *quand on se donne le point x, c'est-à-dire, pour chaque composante λ — aire* L *de l'hypersystème* (l), *les valeurs de z_α, on possède le nombre σ tel que*

$$z_\sigma \neq 0, \qquad z_{\sigma+1} = \ldots = z_\lambda = 0;$$

nommons σ_0 le maximum des σ pour les différentes L *de* (l); *l'exposant du facteur $r - l$ dans le polynome $f(r)$ sera précisément $\mu = \sigma_0$.*

Pour un point x pris au hasard dans l'espace, aucune des z_α n'est zéro; $\sigma = \lambda$, $\sigma_0 = \lambda_0$, $f(r)$ se confond avec $\psi(r)$.

27. Appliquons la méthode, qui vient d'être exposée, à construire les points fondamentaux de p, c'est-à-dire les droites fondamentales d_1 de degré 1 (nos 2 et 3).

On a $m = 1$. d_1 contient une seule droite $\bar{x}$ de degré $h = 1$. Le polynome $f(r)$ est de degré 1. L'exposant μ est zéro pour tous les hypersystèmes, sauf un, (l) par exemple. Pour (l), $\mu = 1$.

Prenons une composante λ — aire L de l'hypersystème (l'), $l' \neq l$. On a $\mu = 0$. La formule (o) du n° 24 (problème $\mathfrak{A}$) montre qu'il faut annuler les λ dernières z_α, c'est-à-dire les annuler toutes.

Supposons, au contraire, que L est dans l'hypersystème (l). Alors $\mu = 1$.

Si $\lambda > 1$, la règle du n° 24 (problème $\mathfrak{A}$) montre que l'on doit faire

$$z_1 = \text{arbitr.}, \qquad z_2 = z_3 = \ldots = z_\lambda = 0.$$

Si $\lambda = 1$, z_1 l'unique variable z_α, doit rester arbitraire.

Tout cela est d'accord avec la règle que j'ai déjà donnée dans ma Note aux *Comptes rendus* du 9 mai 1904.

SUR LE CAS D'EXCEPTION DE M. PICARD ET LES FONCTIONS MULTIFORMES;

Par M. Georges Rémoundos.

1. Ce travail est le développement d'une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (20 juin 1904). Dans mon Mémoire, qui a été présenté à la Faculté des Sciences de Paris comme thèse de l'Université, je fais l'étude des zéros des fonctions multiformes en étendant le théorème de M. Picard et ses généralisations à toutes les fonctions ayant un nombre fini de branches, définies par une équation telle que

$$f(z, u) = u^{\nu} + A_1(z)u^{\nu-1} + A_2(z)u^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu-1}(z)u + A_{\nu}(z) = 0,$$

les $A_i(z)$ étant des fonctions entières ou bien des fonctions uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, et à certaines classes de fonctions à un nombre infini de branches (voir *Comptes rendus*, 8 février 1904).

J'ai, à plusieurs reprises, signalé le fait que ces recherches ont pour base un théorème fondamental de la théorie des fonctions, dû à M. Borel. Ce théorème s'énonce comme il suit :

Si les fonctions entières $Q_i(z)$ *croissent moins vite que* $e^{\mu(z)}$, *les exposants* $H_i(z)$ *croissant tous plus vite que* $[\mu(r)]^{1+\alpha}$, *où* α *est un nombre positif quelconque, l'identité*

$$(1) \qquad Q_1(z)e^{H_1(z)} + Q_2(z)e^{H_2(z)} + \ldots + Q_n(z)e^{H_n(z)} = 0$$

entraîne (¹) *la nullité de tous les coefficients* $Q_i(z)$.

Dans le cas où les fonctions $Q_i(z)$ et $H_i(z)$ sont d'ordre fini, le théorème de M. Borel est susceptible d'une généralisation, grâce à quelques résultats de MM. Lindelöf (²) et Boutroux (³).

(¹) Nous supposons que l'identité ne soit pas réductible à une autre de même forme et ayant un nombre moindre d'exponentielles (de termes); en d'autres termes, nous supposons que toutes les différences $H_i(z) - H_k(z)$ jouissent elles-mêmes de la propriété de croître plus vite que $[\mu(r)]^{1+\alpha}$.

(²) *Acta Societatis scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, n° 1, 1902.

(³) Thèse *Sur quelques propriétés des fonctions entières* (Stockholm, Centraltryckeriet).

2. D'après ces auteurs, si le module maximum $M(r)$ d'une fonction entière $F(z)$ satisfait aux inégalités

$$(2)\qquad \begin{cases} M(r) < e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu+\varepsilon}}, \\ M(r) > e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu-\varepsilon}}, \end{cases}$$

la première à partir d'une certaine valeur de r et la seconde pour une infinité de valeurs de r dépassant toute limite donnée, on aura aussi l'inégalité

$$(3)\qquad |F(z)| > e^{-r^{\rho}(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu+\varepsilon}},$$

pour une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment. C'est le théorème bien connu de M. Hadamard (sur le module minimum) précisé.

Dans son travail publié par l'*Arkiv for Matematik, Astronomi, och Fisik, utgifvet af k. Svenska Vetenskapsakademien*, M. Wiman a précisé le théorème de M. Hadamard d'une autre manière relativement aux *intervalles d'exclusion*. D'après ses résultats, la longueur d'un intervalle d'exclusion commençant par r_0 peut être prise égale à $r_0 V$, V étant un nombre positif, aussi petit que l'on voudra, fixé d'avance.

On en déduit le fait suivant, important pour notre but, à savoir :

Etant donné un nombre quelconque fini de fonctions entières, il y a toujours une infinité de valeurs de r de module croissant indéfiniment, pour lesquelles toutes ces fonctions satisfont à l'inégalité (3).

Dans une Note récente du *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXII, 1904, p. 314) nous avons précisé davantage le théorème de M. Hadamard concernant les points d'exclusion, mais sans utiliser la définition d'ordre de $M(r)$ plus précise de MM. Lindelöf et Boutroux.

3. En précisant un résultat de M. Borel, M. Boutroux a pu énoncer un théorème très important sur la croissance de la dérivée d'une fonction entière : il a démontré que, si l'on exclut du champ de la variable certaines aires fermées entourant les pôles, aires dont la somme peut être rendue négligeable, la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre fini est comparable, par-

tout ailleurs, à une puissance finie de la variable (*Thèse*, deuxième Partie).

Il résulte immédiatement de là que, si une fonction $F(z)$ satisfait aux inégalités (2), il en sera de même de sa dérivée $F'(z)$, pourvu que l'on y remplace ε par $\varepsilon_1 < \varepsilon$. En d'autres termes, la dérivée $F'(z)$ a le même ordre $(\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu)$ que la fonction $F(z)$, même lorsqu'on attribue à la notion de l'ordre le sens plus large considéré par M. Lindelöf.

Considérons maintenant un nombre fini de fonctions $F_1(z)$, $F_2(z)$, ..., $F_m(z)$ d'ordre $(\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu)$ et une fonction $R(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ rationnelle [1] par rapport à $F_1(z)$, $F_2(z)$, ..., $F_m(z)$; il est clair que les résultats ci-dessus indiqués nous conduisent à la conclusion que le module de la fonction

$$\Phi(z) = R[F_1(z), F_2(z), \ldots, F_m(z)]$$

sera compris sur une infinité de cercles de rayons croissant indéfiniment [*cf.* Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX, 1897)], *entre*

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \varepsilon}} \quad \text{et} \quad e^{-r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \varepsilon}}.$$

Dès lors, il est aisé, en utilisant les résultats exposés plus haut et en suivant exactement le procédé par lequel M. Borel a démontré son théorème, d'établir le théorème suivant :

Si les fonctions $Q_i(z)$ *croissent moins vite que*

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}},$$

tandis que les fonctions $H_i(z)$ *croissent plus vite que*

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu + \alpha}},$$

α étant un nombre positif quelconque, l'identité

$$Q_1(z) e^{H_1(z)} + Q_2(z) e^{H_2(z)} + Q_n(z) e^{H_n(z)} = 0 \tag{4}$$

entraîne [2]

$$Q_1(z) = 0, \qquad Q_2(z) = 0, \qquad \ldots, \qquad Q_n(z) = 0.$$

---

[1] D'une façon plus précise, il en serait de même d'une fonction rationnelle des $F_1, F_2, \ldots, F_m$ et de leurs dérivées d'ordre quelconque (en nombre fini).

[2] On suppose toujours qu'aucune des différences $H_i(z) - H_k(z)$ ne soit d'ordre inférieur à $r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}$. (J'utilise ici la définition d'ordre donnée par M. Lindelöf.)

C'est une généralisation du cas correspondant du théorème de M. Borel; le lecteur est prié de se reporter à son Mémoire précité (p. 385) pour se rendre bien compte des résultats de ce travail.

4. J'exposerai maintenant une extension du théorème de M. Borel, extension poussée assez loin pour permettre de considérer des identités de la forme (1), où les coefficients $Q_i(z)$ et les exposants $H_i(z)$ ne sont plus des fonctions analytiques. A cette extension nous conduisent les résultats remarquables auxquels M. A. Wiman est arrivé par les considérations plus précises du mode de croissance de $M(r)$ dues à MM. Boutroux et Lindelöf : M. Wiman a mis en lumière le cas où les inégalités établies par ces auteurs, entre l'ordre de grandeur du module maximum et la distribution des zéros, ne sont plus vérifiées. C'est un cas d'exception de M. Picard généralisé. M. Wiman a montré que, lorsque ce cas se présente, la fonction entière $F(z)$ se décompose comme il suit :

$$(5)\qquad \begin{cases} F(z) = F_1(z)\, e^{-\frac{z^\rho}{\rho}\left(\sum\limits_{n_1}^{\infty} \frac{1}{a_n^\rho}\right)} & \text{dans le cas} \quad p = \rho - 1, \\ F(z) = F_1(z)\, e^{\frac{z^\rho}{\rho}\left(\sum\limits_{1}^{n_1} \frac{1}{a_n^\rho}\right)} & \text{dans le cas} \quad p = \rho, \end{cases}$$

p désignant le genre et ρ l'ordre de $F(z)$, le deuxième facteur, qui croît comme une exponentielle, ayant un ordre de grandeur supérieur à celui de $F_1(z)$; j'entends par là que, si le module maximum $M(r)$ de $F(z)$ est de l'ordre $e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}}$, celui de $F_1(z)$ reste inférieur à $e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu - \alpha}}$, α étant un nombre positif quelconque. Quant à l'entier n_1, qui figure dans les formules (5), il est défini par les inégalités

$$(6)\qquad r_{n_1} < r < r_{n_1+1},$$

r étant toujours le module de z et r_n celui du zéro a_n de rang n; on voit bien que le nombre n_1, ainsi défini, est une fonction de $r = |z|$ et qu'il en est de même de la somme $\sum\limits_{n_1}^{\infty} \frac{1}{a_n^\rho}$ que nous désignerons par $q(r)$. Il en résulte que le facteur exponentiel

$$(7)\qquad \sigma(z) = e^{-q(r)\frac{z^\rho}{\rho}}$$

n'est pas une fonction analytique, puisque la fonction

$$\frac{\rho}{z^\rho}\log\sigma(z) = -q(r)$$

n'est pas une fonction analytique de z, et il en est nécessairement de même de l'autre facteur $F_1(z)$. Comme M. Wiman l'a montré, la fonction $F(z)$ doit être considérée comme exceptionnelle, puisque aucune des fonctions $F(z)+f(z)$, où $f(z)$ désigne une fonction d'ordre inférieur à celui de $F(z)$, ne saurait présenter les mêmes caractères que $F(z)$; nous sommes donc en présence d'un cas d'exception, qui comprend comme cas particulier le cas d'exception usuel et dont le caractère exceptionnel n'a pu se présenter que par une décomposition de la fonction $F(z)$ en deux facteurs non *analytiques* par rapport à z.

5. Supposons maintenant que le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$, qui figurent dans la fonction $f(z, u)$, soit

$$e^{r^\rho (\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu}}. \tag{8}$$

Il est d'abord facile de constater qu'il est impossible d'avoir ν valeurs de u, u_1, u_2, ..., u_ν, pour lesquelles la fonction $f(z, u)$ soit d'ordre inférieur à (8), parce que, s'il en était ainsi, il résulterait de la résolution des équations

$$f(z, u_1) = f_1(z), \quad f(z, u_2) = f_2(z), \quad \ldots, \quad f(z, u_\nu) = f_\nu(z), \tag{9}$$

que *tous* les coefficients $A_i(z)$ seraient d'ordre inférieur à (8), ce qui est contradictoire avec notre hypothèse. S'il y a de telles valeurs de u, appelons-les *valeurs exceptionnelles* (E).

Supposons maintenant qu'il y ait $\nu+1$ valeurs de u autres que (E), pour lesquelles la fonction $f(z, u)$ soit *exceptionnelle* au sens précis du mot, d'après M. Wiman. Je dis que cela est impossible.

Soient, en effet, u_0, u_1, u_2, ..., u_ν ces $\nu+1$ valeurs de u; on aura

$$\left\{\begin{array}{l} f(z, u_0) = f_0(z)e^{q_0^{(r)}\frac{z^\rho}{\rho}}, \\ f(z, u_1) = f_1(z)e^{q_1^{(r)}\frac{z^\rho}{\rho}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(z, u_\nu) = f_\nu(z)e^{q_\nu^{(r)}\frac{z^\rho}{\rho}}, \end{array}\right. \tag{10}$$

les $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_\nu(z)$ désignant des fonctions (non analytiques, en général) d'ordre inférieur à (8) et les q_i désignant les sommes de M. Wiman indiquées plus haut, qui, ne dépendant que de $r = (z)$, sont telles que les facteurs exponentiels soient de l'ordre (8).

Comme M. Wiman l'a démontré dans son travail cité, les fonctions $f_i(z)$ obéissent aux inégalités de MM. Boutroux et Lindelöf et au théorème de M. Hadamard sur le module minimum.

D'autre part, si nous différentions les deux membres de l'égalité

$$F_i(z) = f(z, u_i) = f_i(z)\, e^{q_i \frac{z^\rho}{\rho}} \tag{11}$$

en faisant varier la variable sur la circonférence de rayon r, nous obtenons

$$F'_i(z) = e^{q_i \frac{z^\rho}{\rho}} [f'_i(z) + q_i f_i(z)\, z^{\rho-1}]. \tag{12}$$

Or, le rapport $F'_i(z) : F_i(z)$ est comparable [1], d'après les résultats de M. Boutroux, à une puissance finie de z et, par conséquent, $F'_i(z)$ est *exceptionnelle,* au sens de M. Wiman, en même temps que $F_i(z)$.

Il n'y a donc que deux hypothèses possibles pour la fonction

$$f'_i(z) + q_i f_i(z)\, z^{\rho-1}: \tag{13}$$

ou bien elle est aussi exceptionnelle [2], ou bien elle est d'ordre moindre que (8). Mais il n'est pas difficile de constater que c'est la seconde hypothèse qui est vraie : si l'on divise, en effet, membre à membre, les deux égalités (11) et (12), on obtient

$$\frac{F'_i(z)}{F_i(z)} = \frac{f'_i(z)}{f_i(z)} + q_i z^{\rho-1}. \tag{14}$$

Le rapport $F'_i(z) : F_i(z)$ étant comparable à une puissance finie de z (si l'on exclut le voisinage immédiat des zéros), il en est de même de $f'_i(z) : f_i(z)$ et, par conséquent, l'ordre de $f'_i(z)$ n'est

---

(1) Sauf le voisinage immédiat des zéros de $F_i(z)$.

(2) C'est-à-dire susceptible d'une décomposition de M. Wiman ayant un facteur principal de la forme $e^{q_{(r)} \frac{z^\rho}{\rho}}$.

pas supérieur à celui de $f_i(z)$. Il en résulte que la dérivée $F'_i(z)$ a le même facteur *principal* $e^{q_i \frac{z^\rho}{\rho}}$ que la fonction $F_i(z)$. Il est maintenant aisé de prouver que le facteur $f'_i(z) + q_i f_i(z) z^{\rho-1}$ dans la décomposition (12) obéit au théorème de M. Hadamard sur ce module minimum; si l'on effectue, en effet, la décomposition régulière de la fonction exceptionnelle $F'_i(z)$ suivant la méthode de M. Wiman (*voir* le paragraphe 4; on pourrait l'appeler : *décomposition de M. Wiman*), on obtient

$$(15) \qquad F'_i(z) = e^{K_i \frac{z^\rho}{\rho}} \varphi_i(z)$$

avec

$$(16) \quad K_i = -\sum_{n_1}^{\infty} \frac{1}{a'^p_n} \quad (p = \rho - 1) \qquad \text{ou bien} \qquad K_i = \sum_{1}^{n_1} \frac{1}{a'^p_n} \quad (p = \rho),$$

les $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_n, \ldots$ désignant les zéros de $F'_i(z)$ et $\varphi_i(z)$ ayant un ordre inférieur à celui de $e^{K_i \frac{z^\rho}{\rho}}$.

Nous aurons

$$(17) \qquad f'_i(z) + q_i f_i(z) z^{\rho-1} = \varphi_i(z) e^{(K_i - q_i)\frac{z^\rho}{\rho}} \quad (^1).$$

Comme nous l'avons dit plus haut, M. Wiman a établi dans son travail cité que la fonction $\varphi_i(z)$, qui n'est pas toujours analytique, obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum; dès lors, l'égalité (17) nous montre bien clairement qu'il en est de même de la fonction (13).

6. Rien ne nous manque plus pour aller plus loin : l'élimination des coefficients $A_i(z)$ entre les $\nu + 1$ équations (10) nous conduit à l'identité

$$(18) \quad \lambda_0 f_0(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}} + \lambda_1 f_1(z) e^{q_1(r)\frac{z^\rho}{\rho}} + \lambda_2 f_2(z) e^{q_2(r)\frac{z^\rho}{\rho}} + \ldots + \lambda_\nu f_\nu(z) e^{q_\nu(r)\frac{z^\rho}{\rho}} = \lambda,$$

---

(1) Il est clair que la différence $K_i - q_i$ croît moins vite que

$$(\log r)^{\rho_1} (\log_2 r)^{\rho_2} \ldots (\log_\mu r)^{\rho_\mu - \varepsilon},$$

ε étant un certain nombre positif.

où

$$(19)\quad \lambda_i = \begin{vmatrix} 1 & u_{i+1} & u_{i+1}^2 & \dots & u_{i+1}^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_\nu & u_\nu^2 & \dots & u_\nu^{\nu-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_{i-1} & u_{i-1}^2 & \dots & u_{i-1}^{\nu-1} \end{vmatrix} \qquad \lambda = \begin{vmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & \dots & u_0^\nu \\ 1 & u_1 & u_1^2 & \dots & u_1^\nu \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_\nu & u_\nu^2 & \dots & u_\nu^\nu \end{vmatrix}.$$

Tous ces déterminants de Vandermonde représentent des nombres essentiellement différents de zéro.

Il n'y a rien à changer maintenant à la démonstration de M. Borel pour établir l'impossibilité de (18); nous remarquerons d'abord que, quelles que soient les réductions qui peuvent avoir lieu dans le premier membre de cette identité, le second membre λ restera intact et constituera toujours le terme algébrique unique; d'autre part, ces réductions ne sauraient nuire aux propriétés caractéristiques de l'identité. Si, par exemple, la différence $q_1(r) - q_0(r)$ croît moins vite que $(\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\dots(\log_\mu r)^{\rho_\mu - \alpha}$, α étant un nombre positif quelconque, nous aurons

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda_0 f_0(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}} + \lambda_1 f_1(z) e^{q_1(r)\frac{z^\rho}{\rho}} = \left[\lambda_0 f_0(z) + \lambda_1 f_1(z) e^{\delta(r)\frac{z^\rho}{\rho}}\right] e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}} = \psi(z) e^{q_0(r)} \\ &\delta(r) = q_1(r) - q_0(r), \qquad \psi(z) = \lambda_0 f_0(z) + \lambda_1 f_1(z) e^{\delta(r)\frac{z^\rho}{\rho}}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi les deux termes ont été remplacés par un seul de la même forme, puisque $\psi(z)$ croît moins vite que $r^\rho(\log r)^{\rho_1}\dots(\log_\mu r)^{\rho_\mu - b}$, b étant un nombre positif. Par un procédé exposé dans le paragraphe précédent, on démontrera encore que la fonction $\psi(z)$ obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum. En effet, le produit $\psi(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}}$ désignant une fonction entière *analytique*, on aura la décomposition de M. Wiman :

$$(21)\qquad \psi(z) e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}} = W(z) e^{\theta(r)\frac{z^\rho}{\rho}},$$

où $W(z)$ obéit au théorème de M. Hadamard sur le module minimum. L'ordre de $\psi(z)$ étant inférieur à (8), il est clair que la

différence $\theta(r) - q_0(x)$ doit croître moins vite que

$$(22) \qquad (\log r)^{\rho_1}(\log_2 r)^{\rho_2}\ldots(\log_\mu r)^{\rho_\mu-\alpha},$$

α étant positif, et, par conséquent, la fonction $\psi(z)$ sera égale au produit de deux fonctions $W(z)$ et $e^{[\theta(r)-q_0(r)]\frac{z^\rho}{\rho}}$ obéissant au théorème de M. Hadamard sur le module minimum et d'ordre *non supérieur* à celui de $\psi(z)$. Il en sera donc de même de $\psi(z)$.

Nous démontrons aussi, à l'aide du théorème cité plus haut de M. Boutroux, que la dérivée du produit $\psi(z)e^{q_0(r)\frac{z^\rho}{\rho}}$ est une fonction exceptionnelle de la même forme.

Cela acquis, si nous prenons la dérivée de deux membres de l'identité (18), nous obtiendrons une identité *de la même forme avec les mêmes propriétés des coefficients et des exposants,* mais ayant un terme de moins.

Pour les détails de la démonstration, je renvoie au Mémoire précité de M. Borel (p. 385), puisque, au point de vue de la marche de la démonstration, il n'y a rien qui puisse distinguer les identités (18) des identités ordinaires de M. Borel.

Le fait que les coefficients et les exposants ne sont pas des fonctions analytiques n'intervient pas dans la démonstration, car nous avons acquis plus haut les trois éléments nécessaires de la démonstration : 1° la conservation des conditions d'inégalité d'ordre entre les coefficients et les exposants dans les identités déduites de (18) par des dérivations successives ; 2° l'application du théorème sur le module minimum aux coefficients de l'identité (18) ; 1° l'application du même théorème à toutes les identités, déduites de (18) par les dérivations successives.

Nous sommes donc en présence d'une forme *singulière*, pour ainsi dire, du théorème généralisé de M. Borel, que nous avons énoncé dans le paragraphe 3.

7. Les considérations précédentes nous conduisent à l'extension au cas d'exception de M. Picard, *généralisé par M. Wiman,* des résultats que nous avons communiqués autrefois à l'Académie [1]

---

[1] Voir *Comptes rendus*, 30 avril 1903, 8 février 1904 et *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1904, p. 44 : *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes.* Ces résultats seront développés en détail dans ma thèse.

sur les fonctions à ν branches d'ordre fini et sur certaines classes de fonctions à un nombre infini de branches. Nous avons ainsi précisé considérablement ces résultats, grâce aux recherches récentes de MM. Boutroux, Lindelöf et Wiman. On a, entre autres, le théorème suivant :

Si nous désignons par $u = \omega(z)$ *la fonction multiforme définie par l'équation* $f(z, u) = 0$ *d'ordre* $e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1} \ldots (\log_{\mu} r)^{\rho_{\mu}}}$, *les zéros de l'équation*

$$\omega(z) = \alpha \tag{23}$$

(α étant un nombre quelconque) *obéissent aux inégalités établies par MM. Boutroux et Lindelöf pour les fonctions entières du même ordre. Il ne peut pas y avoir d'exception pour plus de* $2\nu - 1$ *valeurs finies de* α. *Il en est de même des équations*

$$\omega(z) = G(z), \tag{24}$$

$G(z)$ *étant une fonction entière d'ordre inférieur à*

$$e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1} \ldots (\log_{\mu} r)^{\rho_{\mu}}}. \tag{25}$$

Ainsi, si la densité des zéros d'une équation (24) est inférieure à celle d'une fonction entière du même ordre (suivant les inégalités de MM. Boutroux et Lindelöf), cette équation doit être considérée comme exceptionnelle.

Nous appelons ordre de la fonction $\omega(z)$ à ν branches le plus grand des ordres des coefficients $A_i(z)$ de $f(z, u)$. Il est aisé de voir que la fonction $\omega(z)$ ne saurait croître plus vite que

$$e^{r^{\rho}(\log r)^{\rho_1} \ldots (\log_{\mu} r)^{\rho_{\mu}} + \alpha},$$

α étant un nombre positif; car, s'il en était ainsi, l'égalité

$$[\omega(z)]^{\nu} + A_1(z)[\omega(z)]^{\nu-1} + A_2(z)[\omega(z)]^{\nu-2} + \ldots + A_{\nu}(z) = 0$$

serait impossible. En effet, le rapport de chaque terme au suivant tend vers l'infini avec un ordre équivalent à celui de $\omega(z)$.

Il est clair aussi qu'une branche, au moins, de $\omega(z)$ sera d'ordre égal à (25), suivant la définition de M. Lindelöf étendue aux fonc-

tions multiformes, car, si toutes les branches étaient d'ordre moindre que (25), il en serait de même de tous les coefficients $A_i(z)$, ce qui est contradictoire à notre hypothèse. Ainsi se trouve justifiée la définition d'*ordre* des fonctions à ν branches donnée ci-dessus.

SUR LE PROBLÈME DE MONGE [1];

Par M. E. Goursat.

La publication d'une Note récente de M. Zervos (*Comptes rendus*, 10 avril 1905) a ramené mon attention sur certains résultats, relatifs au problème de Monge, qui, quoique très incomplets, peuvent peut-être offrir quelque intérêt pour les mathématiciens qui s'occupent de ce genre de questions. Je les indiquerai rapidement.

1. Il est commode, pour faciliter les raisonnements et les énoncés, d'employer le langage de la Géométrie à n dimensions. Étant données $(n+1)$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, nous dirons que tout système particulier de valeurs de ces variables représente les *coordonnées d'un point* dans l'espace à $(n+1)$ dimensions. Nous continuerons à appeler *surface* toute variété à n dimensions située dans cet espace à $(n+1)$ dimensions, et *courbe* toute variété à *une* dimension. Toute surface est représentée par une seule relation entre les coordonnées de ses points; si cette relation est linéaire, la surface sera appelée *surface plane* ou *plan*. De même, nous appellerons *droite* une variété linéaire à une dimension, c'est-à-dire l'ensemble des points dont les coordonnées X_i satisfont à n relations de la forme

$$(1) \qquad \frac{X_1 - x_1}{a_1} = \frac{X_2 - x_2}{a_2} = \ldots = \frac{X_{n+1} - x_{n+1}}{a_{n+1}};$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point particulier de cette droite, $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ ses *paramètres directeurs*.

---

[1] Cette Note a été présentée à la Société Mathématique, dans la séance du 15 juin 1905. Une Note de M. Bottasso, sur le même sujet, a été présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 13 juin 1905.

Un plan P passant par un point de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$

$$(2) \qquad A_1(X_1 - x_1) + A_2(X_2 - x_2) + \ldots + A_{n+1}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0$$

est, en général, déterminé, s'il doit contenir n droites passant par ce point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$; car les coefficients A_i doivent vérifier un système de n équations linéaires et homogènes.

Une droite D, passant par un point fixe M de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, et dont les paramètres directeurs dépendent de p variables arbitraires $\alpha_i (p < n)$, engendre une *variété conique* de sommet M. Si $p = 1$, nous dirons que cette variété conique à deux dimensions est un *cône* de sommet M. Tout cône de sommet M est, d'après cela, représenté par un système de $(n-1)$ équations distinctes

$$(3) \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; X_1 - x_1, \ldots, X_{n+1} - x_{n+1}) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

les f_i étant des fonctions homogènes des différences $X_i - x_i$. Si, dans les équations (1), les paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ sont fonctions d'une seule variable indépendante α, ces droites sont les *génératrices* d'un cône de sommet $M(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, et à chaque valeur de α correspond une génératrice déterminée.

Étant donné un cône de sommet M, tout plan passant par M renferme un certain nombre de génératrices. Si, par exemple, les génératrices du cône sont représentées par les équations (1), a_1, $a_2, \ldots, a_{n+1}$ étant fonctions d'une variable indépendante α, les valeurs de α correspondant aux génératrices situées dans le plan (2) sont racines de l'équation

$$(4) \qquad U(\alpha) = A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_{n+1} a_{n+1} = 0.$$

On peut disposer des coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ de façon que ce plan ait en commun avec le cône n génératrices confondues avec une génératrice déterminée. Si α_0 est la valeur correspondante de la variable α, il faut et il suffit pour cela que α_0 soit une racine multiple d'ordre n de l'équation $U(\alpha) = 0$; on a ainsi n équations de condition

$$(5) \qquad U(\alpha_0) = 0, \qquad U'(\alpha_0) = 0, \qquad \ldots, \qquad U^{(n-1)}(\alpha_0) = 0,$$

qui déterminent, en général, les rapports des coefficients A_1,

$A_2, \ldots, A_{n+1}$. Nous dirons que le plan ainsi obtenu est *osculateur* au cône (T) suivant la génératrice (α_0). En éliminant α_0 entre les n équations (5), on arrive, en général, à $(n-1)$ équations de condition homogènes par rapport à $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$,

$$(6) \qquad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

dépendant, en outre, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, si les paramètres directeurs $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ dépendent non seulement de α, mais des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ du sommet. Nous dirons, pour abréger, que les relations (6) sont les *équations tangentielles* du cône considéré de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

Lorsque le cône est représenté par un système de $n-1$ équations de la forme (3), les n équations (2) et (3) déterminent les génératrices du cône situées dans le plan P. On obtiendra encore les équations tangentielles du cône en exprimant que n de ces génératrices sont confondues. Par exemple, en éliminant $n-1$ des rapports $\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1}, \ldots, \frac{X_{n+1} - x_{n+1}}{X_1 - x_1}$ entre les n relations (2) et (3), on arrive à une équation pour déterminer le dernier rapport, et cette équation devra avoir une racine multiple d'ordre n.

2. Réciproquement, tout système de $n-1$ équations de la forme (6), homogènes par rapport à $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, peut être considéré comme représentant les équations tangentielles d'un cône de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$.

En effet, imaginons que des $(n-1)$ équations (6) on ait tiré les valeurs de $(n-1)$ des rapports $\frac{A_2}{A_1}, \ldots, \frac{A_{n+1}}{A_1}$, en fonction de l'un d'eux α. Le plan P représenté par l'équation (2)

$$U(\alpha) = A_1(X_1 - x_1) + \ldots + A_{n+1}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0$$

ne dépend plus que d'un paramètre variable α. Les n équations

$$(7) \qquad U(\alpha) = 0, \qquad U'(\alpha) = 0, \qquad \ldots, \qquad U^{(n-1)}(\alpha) = 0$$

représentent, quand on donne à α une valeur particulière, une droite D passant par le point M $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. Lorsque α varie, cette droite D engendre un cône de sommet M, et, d'après la façon même dont on l'a obtenu, il est clair que le plan P a n génératrices communes avec ce cône qui sont confondues avec la

génératrice (α). En éliminant α entre les $(n-1)$ équations (7), on aura donc les équations d'un cône de sommet M dont les équations (6) sont les équations tangentielles.

3. Considérons maintenant un système de k équations de Monge ($k \leqq n-1$),

$$(8) \quad f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

les f_i étant des fonctions homogènes par rapport à dx_1, dx_2, ..., dx_n. Le problème de l'intégration de ce système consiste à exprimer x_1, x_2, ..., x_{n+1} explicitement en fonction d'une variable auxiliaire t, de $n-k$ fonctions arbitraires de ce paramètre et de leurs dérivées successives jusqu'à un ordre déterminé. Ce problème a été résolu par Monge dans le cas particulier où l'on a $n = 2$, $k = 1$. Nous allons examiner le cas où l'on a, n étant quelconque, $k = n-1$.

Si, dans les $(n-1)$ équations (8), on remplace dx_i par $X_i - x_i$, on a les équations d'un cône de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$. A chaque point de l'espace à $(n+1)$ dimensions les équations proposées font correspondre un cône (T) ayant son sommet en ce point, et le problème de Monge peut encore être formulé en ces termes :

Déterminer les courbes de l'espace à $n+1$ dimensions qui sont tangentes en chacun de leurs points à l'une des génératrices du cône (T) *ayant ce point pour sommet.*

Écrivons l'équation d'un plan passant par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ sous la forme

$$(9) \qquad X_{n+1} - x_{n+1} = p_1(X_1 - x_1) + \ldots + p_n(X_n - x_n);$$

les équations tangentielles du cône (T) de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ sont alors de la forme

$$(10) \quad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Si l'on considère x_1, x_2, ..., x_n comme n variables indépendantes, x_{n+1} comme une fonction de ces n variables, et p_1, p_2, ..., p_n comme les dérivées partielles de x_{n+1} $\left(p_i = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i}\right)$, les rela-

tions (10) forment un système de $(n-1)$ équations aux dérivées partielles du premier ordre à une seule fonction inconnue. A tout système de $(n-1)$ équations de Monge

$$(9') \qquad f_i(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}; dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

correspond ainsi un système (10) de $(n-1)$ équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre, que nous appellerons le *système associé* du premier système (9).

4. Cela posé, il est facile de montrer que la méthode de Monge s'étend sans peine au cas où le système associé d'équations aux dérivées partielles (10) est *en involution*.

Soit, en effet,

$$(11) \qquad V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; a, b) = 0$$

une intégrale complète de ce système. Le plan tangent à l'une des surfaces intégrales S passant en un point donné $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ a pour équation

$$(12) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1}(X_1 - x_1) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0,$$

les deux paramètres a et b étant liés par la relation (11). Ce plan ne dépend donc, en réalité, que d'un seul paramètre variable, et, d'après la façon dont on a déduit le système adjoint (10) du système (9'), le plan représenté par l'équation (12) reste osculateur au cône (T) de sommet $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ représenté par les équations

$$(13) \qquad \begin{cases} f_i(x_1, \ldots, x_{n+1}; X_1 - x_1, X_2 - x_2, \ldots, X_{n+1} - x_{n+1}) = 0, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Pour déduire les équations (13) de l'intégrale complète (11), on pourrait donc procéder comme il suit. Regardons, pour fixer les idées, a comme un paramètre variable et b comme une fonction de ce paramètre définie par la relation (11). Les dérivées successives

$$b' = \frac{db}{da}, \qquad b'' = \frac{d^2 b}{da^2}, \qquad \ldots, \qquad b^{(n-1)} = \frac{d^{n-1} b}{da^{n-1}}, \qquad b^{(n)} = \frac{d^n b}{da^n}$$

sont déterminées par les relations

$$(14)\quad \begin{cases} V_1 = \dfrac{\partial V}{\partial a} + \dfrac{\partial V}{\partial b} b' = 0, \\ V_2 = \dfrac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b} b' + \dfrac{\partial^2 V}{\partial b^2} b'^2 + \dfrac{\partial V}{\partial b} b'' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ V_n = \dfrac{\partial^n V}{\partial a^n} + \dots + \dfrac{\partial V}{\partial b} b^{(n)} = 0. \end{cases}$$

Les équations obtenues en différentiant $(n-1)$ fois successivement l'équation (12) par rapport au paramètre a, b étant supposée remplacée par son expression tirée de la relation (11), peuvent alors s'écrire

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1}(X_1 - x_1) + \dots + \dfrac{\partial V_1}{\partial x_{n+1}}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial V_{n-1}}{\partial x_1}(X_1 - x_1) + \dots + \dfrac{\partial V_{n-1}}{\partial x_{n+1}}(X_{n+1} - x_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

et l'on obtiendra les équations (13) en éliminant a, b, b', b'', ..., $b^{(n-1)}$ entre les $2n$ équations (11), (12), (14) et (15).

Supposons maintenant que l'on pose

$$b = \varphi(a),$$

la fonction $\varphi(a)$ étant une fonction arbitraire de a, et considérons le système de $n-1$ équations

$$(16)\qquad V = 0, \qquad \frac{dV}{da} = 0, \qquad \frac{d^2 V}{da^2} = 0, \qquad \frac{d^n V}{da^n} = 0,$$

où l'on a posé

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{da} = \dfrac{dV}{da} + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a), \\ \dfrac{d^2 V}{da^2} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\varphi'(a) + \dfrac{\partial^2 V}{\partial b^2}\varphi'^2(a) + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi''(a), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{d^n V}{da^n} = \dfrac{\partial^n V}{\partial a^n} + \dots + \dfrac{\partial V}{\partial b}\varphi^{(n)}(a). \end{cases}$$

Ces $(n+1)$ équations simultanées permettent en général d'exprimer x_1, x_2, ..., x_{n+1} en fonction de la variable auxiliaire a, de

$\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{(n)}(a)$. Je dis que la courbe de l'espace à $(n+1)$ dimensions ainsi déterminée est une *intégrale* du système de Monge. En effet, si nous appelons $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ les dérivées de ces fonctions par rapport à a, on déduit des équations (16)

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial x_{n+1}} x'_{n+1} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{dV}{da}\right) x'_1 + \ldots + \dfrac{\partial\left(\dfrac{dV}{da}\right)}{\partial x_{n+1}} x'_{n+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\[2ex] \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n-1}V}{da^{n-1}}\right)}{\partial x_1} x'_1 + \ldots + \dfrac{\partial\left(\dfrac{d^{n+1}V}{da^{n-1}}\right)}{\partial x_{n+1}} x'_{n+1} = 0, \end{array}\right.$$

et le système des $2n+1$ équations (16) et (18) devient identique au système formé des équations (11), (12), (14) et (15), pourvu qu'on remplace $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ par $X_1 - x_1, X_2 - x_2, \ldots, X_n - x_n$ respectivement, puis $\varphi(a)$ par b, $\varphi'(a)$ par b', ..., $\varphi^{(n)}(a)$ par $b^{(n)}$. Par suite, l'élimination de a, $\varphi(a)$, $\varphi'(a)$, ..., $\varphi^{(n)}(a)$ entre les équations (16) et (18) conduira aux relations

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; x'_1, \ldots, x'_{n+1}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

identiques aux relations (9). Les formules (16) représentent donc l'intégrale générale du système de Monge proposé.

5. Les systèmes précédents sont évidemment très particuliers; mais on peut quelquefois étendre la méthode à des systèmes de Monge plus généraux, en imitant la méthode d'intégration de Lagrange et Charpit pour une équation aux dérivées partielles. Étant donné, par exemple, un système de $n-k$ équations de Monge ($k > 1$), pour appliquer la méthode précédente il suffira de pouvoir lui adjoindre $k-1$ équations nouvelles de même forme, de façon que le système associé du système ainsi complété soit en involution.

Considérons, par exemple, un système de Monge de la forme

$$(19)\qquad f_i(dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-k,$$

les fonctions f_i ne renfermant pas les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Si $k = 1$, le système associé est de la forme

$$(20) \qquad F_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

et par conséquent est en involution. Si k est > 1, il suffira d'ajouter aux équations (19) $k-1$ équations de même forme, par exemple

$$\frac{dx_3}{dx_1} = \psi_1\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right), \qquad \ldots, \qquad \frac{dx_{k+1}}{dx_1} = \psi_{k-1}\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right),$$

les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k-1}$ étant arbitraires, pour être ramené au premier cas.

Les systèmes (19) ont été considérés par M. Darboux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1887). La méthode précédente montre comment on peut rattacher l'intégration de ces systèmes à une théorie générale, tout à fait analogue à la théorie de Monge pour l'équation à trois variables.

6. Appliquons, par exemple, cette méthode à l'équation de Serret

$$(21) \qquad dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_4^2.$$

Joignons à cette équation une relation de forme arbitraire

$$(22) \qquad \frac{dx_3}{dx_1} = \varphi\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right).$$

Les équations (21) et (22) forment un système de Monge, et les équations du cône (T) correspondant de sommet (x_1, x_2, x_3, x_4) sont

$$(23) \qquad \begin{cases} (X_4 - x_4)^2 = (X_1 - x_1)^2 + (X_2 - x_2)^2 + (X_3 - x_3)^2, \\ \dfrac{X_3 - x_3}{X_1 - x_1} = \varphi\left(\dfrac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1}\right). \end{cases}$$

Pour obtenir le système associé correspondant, formons l'équation qui donne les génératrices communes au cône (T) et au plan

$$X_4 - x_4 = p_1(X_1 - x_1) + p_2(X_2 - x_2) + p_3(X_3 - x_3);$$

on peut poser

$$\frac{X_2 - x_2}{X_1 - x_1} = \alpha, \qquad \frac{X_3 - x_3}{X_1 - x_1} = \varphi(\alpha),$$

ce qui donne

$$\frac{X_4 - x_4}{X_1 - x_1} = p_1 + p_2\alpha + p_3\varphi(\alpha).$$

L'équation en α est alors

$$[p_1 + p_2\alpha + p_3\varphi(\alpha)]^2 = 1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha),$$

ou

$$(24) \qquad p_1 + p_2\alpha + p_3\varphi(\alpha) = \sqrt{1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha)} = U(\alpha).$$

D'après la théorie générale, on aurait les équations du système associé d'équations aux dérivées partielles en éliminant α entre la relation (24) et les relations (25)

$$(25) \qquad \begin{cases} p_2 + p_3\varphi'(\alpha) = U'(\alpha), \\ p_3\varphi''(\alpha) = U''(\alpha). \end{cases}$$

Il est inutile d'effectuer cette élimination, car on aura une intégrale complète de ce système en prenant le plan

$$X_4 = p_1X_1 + p_2X_2 + p_3X_3 + b,$$

p_1, p_2, p_3 étant remplacées par leurs expressions tirées des formules (24) et (25), α et b étant des constantes arbitraires.

Remplaçons maintenant b par une seconde fonction arbitraire $\psi(\alpha)$; d'après le théorème général, les fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 du paramètre α définies par les quatre équations

$$(26) \qquad \begin{cases} x_4 = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \psi(\alpha), \\ 0 = p'_1x_1 + p'_2x_2 + p'_3x_3 + \psi'(\alpha), \\ 0 = p''_1x_1 + p''_2x_2 + p''_3x_3 + \psi''(\alpha), \\ 0 = p'''_1x_1 + p'''_2x_2 + p'''_3x_3 + \psi'''(\alpha), \end{cases}$$

p'_i, p''_i, p'''_i étant les dérivées de p_i par rapport à α, doivent satisfaire à la relation proposée (21).

Il est facile de le vérifier. On déduit en effet des relations (24) et (25) que l'on a

$$(27) \qquad \begin{cases} p_1 + p_2\alpha + p_3\varphi(\alpha) = U(\alpha), \\ p'_1 + p'_2\alpha + p'_3\varphi(\alpha) = 0, \\ p''_1 + p''_2\alpha + p''_3\varphi(\alpha) = 0. \end{cases}$$

D'un autre côté, en différentiant les relations (26), il vient

$$(28)\qquad \begin{cases} dx_4 = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + p_3\,dx_3, \\ 0 = p'_1\,dx_1 + p'_2\,dx_2 + p'_3\,dx_3, \\ 0 = p''_1\,dx_1 + p''_2\,dx_2 + p''_3\,dx_3. \end{cases}$$

Les relations (27) et (28) prouvent que l'on doit avoir

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{\alpha} = \frac{dx_3}{\varphi(\alpha)} = \frac{dx_4}{U(\alpha)},$$

et comme l'on a

$$U^2(\alpha) = 1 + \alpha^2 + \varphi^2(\alpha),$$

il s'ensuit que l'on a aussi

$$dx_4^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

SUR UNE TRANSFORMATION RÉCIPROQUE EN MÉCANIQUE;

Par M. Paul-J. Suchar.

M. Painlevé (1) a étudié des transformations de mouvement qui constituent la généralisation de la transformation homographique en Mécanique, indiquée par M. Appell (2). On peut envisager des transformations de mouvement distinctes des précédentes, que je désigne sous le nom de *transformations réciproques*, et qui seront définies comme il suit : les mouvements de deux points qui ont lieu, l'un par rapport au temps t et l'autre par rapport au temps t_1, seront réciproques si, en deux points correspondants de leurs trajectoires, les coordonnées du premier point sont des fonctions des projections de la vitesse du second point sur les axes de coordonnées, et réciproquement, les coordonnées du second point sont les mêmes fonctions des composantes de la vitesse du premier point.

Si l'on suppose connues les fonctions qui caractérisent la réciprocité, et si, de plus, on se donne une relation entre les temps t

---

(1) Painlevé, *Journ. de Math.*, t. X, 1894.
(2) Appell, *American Journal*, t. XII.

et t_1, les équations du mouvement des deux points seront déterminées.

Inversement, et c'est le cas le plus intéressant, on se donne les équations du mouvement d'un point matériel et l'on se demande si le mouvement est transformable en un autre réciproque.

Le problème ainsi posé est, en général, impossible, si aucune hypothèse n'est faite sur la nature de la force qui sollicite le point, ainsi que sur la direction de la force.

Je me propose, dans ce travail, de montrer que le mouvement est toujours transformable en un autre réciproque, si le temps n'entre pas explicitement dans l'expression de la force et si, de plus, la direction de la force fait, avec une droite fixe, un angle dont la tangente est le quotient de deux fonctions linéaires et homogènes des coordonnées du point matériel; en d'autres termes, si les projections de la force sur les axes de coordonnées, quand on se borne au mouvement plan, sont de la forme

$$X = (ax + by)u, \qquad Y = (a'x + b'y)u,$$

où a, b, a', b' sont des constantes et u une fonction absolument quelconque des coordonnées du point et des composantes de la vitesse. Le problème comprend, comme cas particulier, le cas des forces centrales; c'est surtout ce dernier cas qui fera l'objet du présent Mémoire.

1. Soient M et M_1 deux points matériels de même masse, que pour simplifier nous supposons égale à 1. Nous supposons de plus que le mouvement se fait dans un plan et que les variables indépendantes pour les deux mouvements sont les temps t et t_1.

Appelons x, y les coordonnées du premier point, x', y' leurs dérivées par rapport à t et X, Y les projections de la force sur les axes de coordonnées; enfin, x_1, y_1 les coordonnées du second point, x'_1, y'_1 les dérivées de x_1, y_1 par rapport à t_1 et X_1, Y_1 les composantes de la force.

D'après l'hypothèse faite, les deux mouvements seront réciproques, si, entre x, y, x_1, y_1, x', y', x'_1, y'_1, on a les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = f(x', y'), & x = f(x'_1, y'_1), \\ y_1 = \varphi(x', y'), & y = \varphi(x'_1, y'_1). \end{cases}$$

Si les fonctions f et φ sont connues, et si l'on pose

$$(2) \qquad \frac{dt_1}{dt} = \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} u,$$

où $\frac{D|f, \varphi|}{D|x', y'|}$ est le déterminant fonctionnel de f et φ, les équations du mouvement des deux points seront connues. Nous aurons, en effet,

$$x'_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} X + \frac{\partial f}{\partial y'} Y\right) \frac{dt}{dt_1}, \qquad x' = \left(\frac{\partial f}{\partial x'_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial y'_1} Y_1\right) \frac{dt_1}{dt},$$

$$y'_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} Y\right) \frac{dt}{dt_1}, \qquad y' = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} X_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y'_1} Y_1\right) \frac{dt_1}{dt},$$

d'où l'on déduira X, Y, X_1, Y_1, en ayant égard à (1) et (2).

2. Considérons le problème inverse, c'est-à-dire le problème où l'on se donne les équations du mouvement du point M, et examinons tout de suite le cas où la force est centrale. Les équations du mouvement seront alors

$$(1) \qquad \begin{cases} x'' = ux, \\ y'' = uy, \end{cases}$$

Nous supposons seulement que le temps t n'entre pas implicitement dans l'expression de la force.

Si ce mouvement est transformable en un autre réciproque, il existera deux fonctions f et φ, telles qu'en désignant par x_1, y_1 les coordonnées d'un point M_1, on ait

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = f(x', y'), & x = f(x'_1, y'_1), \\ y_1 = \varphi(x', y'), & y = \varphi(x'_1, y'_1). \end{cases}$$

Il s'agit de trouver ces deux fonctions. Supposons le problème résolu et différentions les premières relations (2) par rapport à t_1; on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} x'_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x'} X + \frac{\partial f}{\partial y'} Y\right) \frac{dt}{dt_1}, \\ y'_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} X + \frac{\partial \varphi}{\partial y'} Y\right) \frac{dt}{dt_1}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\frac{dt_1}{dt} = \frac{D(f, \varphi)}{D(x', y')} u,$$

et qu'on remplace X, Y, par ux, uy, on aura

$$(4)\qquad \begin{cases} x'_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x'}x + \dfrac{\partial f}{dy'}y, \\ y'_1 = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x'}x + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y'}y; \end{cases}$$

or, les fonctions f et φ étant supposées connues, x'_1, y'_1 seront d'après (2) des fonctions de x et y; en les substituant dans ces dernières relations, on aura évidemment une identité, ce qui exige que ces relations soient indépendantes de x' et y'; il faut donc que f et φ soient linéaires par rapport à x' et y', et les relations (2) seront de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = ax' + by' + c, & x = ax'_1 + by'_1 + c, \\ y_1 = a'x' + b'y' + c', & y = a'x'_1 + b'y'_1 + c', \end{cases}$$

où l'on pose

$$ab' - ba' = K^2.$$

Si l'on substitue dans (4) les valeurs de x'_1, y'_1 déduites de (5), on trouve les relations suivantes entre les coefficients

$$b' - a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 0, \qquad a' = 0, \qquad c' = 0,$$

et comme on a

$$ab' - ba' = K^2,$$

la transformation la plus générale sera

$$x_1 = Kx', \qquad y_1 = Ky'.$$

Donc, si un point matériel est sollicité par une force centrale dont l'expression ne contient pas explicitement le temps, le mouvement sera toujours transformé en un autre réciproque, par la transformation

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = Kx', & \dfrac{dt_1}{dt} = K^2 u, \\ y_1 = Ky', \end{cases}$$

les équations du mouvement étant

$$x'' = ux, \qquad y'' = uy.$$

3. Le point M_1, transformé du premier, sera aussi sollicité par une force centrale. En effet, si nous différentions les relations (6) par rapport à t_1, on aura

$$x'_1 = Kx'\frac{dt}{dt_1}, \qquad y'_1 = Ky'\frac{dt}{dt_1};$$

en ayant égard aux équations du mouvement et à la relation qui lie t à t_1, on aura

$$(7) \qquad x'_1 = \frac{x}{K}, \qquad y'_1 = \frac{y}{K};$$

une nouvelle différentiation nous donne

$$x''_1 = \frac{x_1}{K^4 u}, \qquad y''_1 = \frac{y_1}{K^4 u},$$

où u s'exprime à l'aide de (6) et (7) en fonction de x_1, y_1, x'_1, y'_1.

4. Remarquons que la trajectoire transformée, si on la rapporte aux mêmes axes que le premier mouvement, n'est autre chose qu'une courbe homothétique de la courbe hodographe correspondant au premier mouvement, la constante d'homothétie étant K, et le centre d'homothétie étant le centre des forces. Si, en particulier, $K = 1$, la trajectoire transformée est la courbe hodographe du premier mouvement, et la transformation est, dans ce cas, corrélative, comme nous l'avons fait voir dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 27 octobre 1902, c'est-à-dire que *la trajectoire transformée est la polaire réciproque de la trajectoire du mouvement donné par rapport au cercle ayant le centre des forces pour centre et* $\sqrt{C}$ *pour rayon, tournée d'un angle droit autour de ce centre dans un sens convenable,* la constante C étant celle des aires. On obtient une démonstration immédiate de cette proposition en partant du théorème des aires mis sous la forme $pv = C$, si l'on remarque que l'extrémité du segment vitesse, porté sur la droite qui mesure p, a pour polaire, par rapport au cercle dont le centre est le centre des forces, la tangente à la trajectoire; donc, si l'on fait tourner cette polaire réciproque d'un angle droit autour du centre et dans un sens convenable, elle coïncidera avec la courbe hodographe correspon-

dante, c'est-à-dire, dans le cas présent, avec la trajectoire transformée.

5. Supposons toujours la constante $K = 1$. Il est intéressant de déterminer la relation à laquelle la force donnée et la force transformée doivent satisfaire. On a, en effet, en désignant par F la force donnée et par F_1 la force transformée,

$$FF_1 = rv, \tag{8}$$

que l'on obtient par différentiation des formules (6) et (7) où r est la distance du point M au centre des forces. Une autre remarque intéressante est qu'il y a échange entre les coordonnées polaires r et θ et la vitesse v et la direction α de cette vitesse; c'est-à-dire que, dans les deux mouvements transformés et en deux points correspondants, les coordonnées polaires de l'un des points représentent la vitesse et la direction de la vitesse de l'autre point, ce qui résulte des formules mêmes de transformation. Il s'ensuit alors qu'en désignant par p_1 la distance du centre des forces à la tangente à la courbe transformée, c'est-à-dire à l'hodographe, le théorème des aires pourra se mettre aussi sous la forme $p_1 r = C$, la constante C étant la même que dans le premier mouvement; il suffit pour s'en convaincre de remarquer que, si φ est l'angle de la vitesse avec le rayon vecteur, cet angle se conserve dans les deux transformations, et l'on déduit de la relation des aires

$$C = rv \sin\varphi = p_1 r = pv. \tag{9}$$

A l'aide des formules (8) et (9), nous allons établir les équations différentielles de la trajectoire et de la courbe hodographe. Remarquons que le rayon vecteur r est la diagonale d'un rectangle ayant pour côtés les distances de l'origine à la tangente et à la normale à la trajectoire; or ces deux distances sont données par p et $\frac{dp}{d\alpha}$; on aura donc, en ayant égard à (9),

$$r^2 = C^2\left[\frac{1}{v^2} + \left(\frac{d\frac{1}{v}}{d\alpha}\right)^2\right],$$

et, par analogie, pour la courbe hodographe

$$v^2 = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2\right].$$

Différentions ces formules et remarquons que la différentielle de la force vive dans le premier mouvement est

$$v\,dv = F\,dr,$$

et dans le mouvement transformé est

$$r\,dr = F_1\,dv.$$

Puisque r est la vitesse et v le rayon vecteur, nous aurons la formule de Binet

$$F = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r}\right) \tag{10}$$

et la formule suivante

$$F_1 = -\frac{C^2}{v^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2} + \frac{1}{v}\right);$$

d'où, en ayant égard à (8), on conclura finalement,

$$\frac{rv}{F} = -\frac{C^2}{v^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{v}}{d\alpha^2} + \frac{1}{v}\right). \tag{11}$$

6. Les formules (10) et (11) nous montrent que, si l'on sait déterminer la trajectoire ainsi que le mouvement lorsque la loi de la force est de la forme

$$F = rf(r, \theta, v),$$

on saura encore déterminer la trajectoire et le mouvement si la loi de la force est de la forme

$$F = \frac{r}{f(v, \alpha, r)},$$

où, dans la fonction précédente f, nous avons fait l'échange entre r, θ et v. La remarque est évidente; on sait d'ailleurs que r s'exprime

en fonction de $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}$, d'après le numéro précédent. Si, alors, nous supposons les deux mouvements rapportés aux mêmes axes et l'origine placée au centre des forces, le second mouvement nous donnera d'abord la courbe hodographe correspondant à cette dernière force; alors, pour obtenir la trajectoire, il faudra la faire tourner d'un angle droit autour de l'origine des axes, et prendre la polaire réciproque de cette courbe par rapport au cercle dont nous avons déjà parlé.

Considérons, comme exemple, les lois de forces trouvées par MM. Darboux et Halphen [1] et qui font décrire à leurs points d'application des coniques:

$$\frac{\mu r}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{\frac{3}{2}}},\quad \frac{\mu r}{(ax+by+c)^3},\quad \frac{\mu r}{(ax+by)^3}.$$

On sait déterminer le mouvement ainsi que la trajectoire pour chacune de ces forces; il résulte alors de notre remarque qu'on saura encore déterminer le mouvement ainsi que la trajectoire, pour les lois de forces

$$\frac{1}{\mu} r(ax'^2+2bx'y'+cy'^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{1}{\mu} r(ax'+by'+c)^3,\quad \frac{1}{\mu} r(ax'+by')^3,$$

où x', y' sont les dérivées de x et y, par rapport à t. Les trajectoires correspondantes seront des coniques, puisque les courbes hodographes sont aussi des coniques.

On peut se rendre compte de la nature des trajectoires décrites sous l'action de ces dernières lois de forces. Il suffit pour cela de remarquer que, quelles que soient les conditions initiales, les lois de MM. Darboux et Halphen donnent des coniques qui sont tangentes à chacune des deux droites $ax^2+2bxy+cy^2=0$, ou bien qui ont la même droite $ax+by+c=0$ pour droite polaire par rapport au centre des forces, ou enfin qui passent toutes par

---

[1] *Comptes rendus*, t. LXXXIV.

le centre attractif. Or, ces courbes sont les courbes hodographes correspondant aux dernières lois de forces; donc, d'après des théorèmes bien connus sur les pôles et polaires, les coniques trajectoires auront un genre indépendant des conditions initiales et dépendant du signe de $b^2 - ac$, ou bien seront des coniques ayant toutes pour centre le point dont les coordonnées homogènes sont $x = a$, $y = b$, $z = c$, ou enfin seront des paraboles.

7. La remarque du numéro précédent nous a suggéré l'idée de chercher s'il n'existe pas, outre les lois de forces classiques qu'on rencontre dans tous les Traités de Mécanique, d'autres lois de forces pour lesquelles le mouvement s'obtienne par des quadratures. En effet, outre les lois qui ne dépendent que de la position du mobile, savoir $f(r)$ et la loi de Jacobi $\frac{f(\theta)}{r^2}$, on peut encore envisager les lois

$$\frac{1}{r^2} f\left(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta + \frac{\gamma}{r}\right). \tag{12}$$

$$r f(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) \tag{13}$$

où α, β et γ sont des constantes données et f une fonction arbitraire. Il est facile de voir que le mouvement peut s'obtenir par des quadratures.

La proposition est immédiate pour la première loi de force, qui rentre dans le type de Jacobi si $\gamma = 0$; pour $\gamma \gtrless 0$, si l'on fait dans la formule de Binet le changement de fonction

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma}{r_1} - \alpha \cos\theta - \beta \sin\theta,$$

on obtient l'équation différentielle de la trajectoire d'un mobile sollicité par une force centrale et ne dépendant que de la distance r_1 au centre; par conséquent le mouvement s'obtiendra par des quadratures.

La démonstration de la proposition pour la deuxième loi de force peut se faire à l'aide d'un théorème dû à M. Appell [1] et qui s'énonce ainsi :

---

[1] Appell, *loc. cit.*

Toute transformation homographique, faite sur les coordonnées d'un point sollicité par une force centrale qui ne dépend que de la position du mobile, transforme le mouvement en un autre où la force transformée est également centrale et ne dépend que des coordonnées du point transformé.

Nous allons effectuer la transformation particulière

$$x = ax_1 + by_1, \qquad y = a'x_1 + b'y_1, \qquad ab' - ba' = 1,$$

que nous supposons seulement n'être pas équivalente à un changement des axes de coordonnées; enfin, la variable indépendante dans les deux mouvements est toujours le temps t. On trouve que la force transformée est du même type que la précédente, savoir

$$r_1 f(\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2),$$

mais la transformation contient encore trois constantes arbitraires; on pourra alors disposer de ces constantes de manière à annuler le coefficient β_1 et à rendre égaux à 1 les coefficients α_1 et γ_1; alors la force transformée ne dépendra plus que de la distance.

Remarquons en passant qu'à l'égard des deux forces (12) et (13) on peut se proposer le problème suivant :

Sachant qu'un point matériel est sollicité par une force centrale du type (12) *ou du type* (13), *et que la trajectoire est algébrique, trouver la fonction f.*

On trouvera que les seules courbes algébriques sont des coniques et que les deux types (12) et (13) se ramènent aux lois de MM. Darboux et Halphen. En effet, le mouvement se transforme par la transformation précédente en un autre où la trajectoire est encore algébrique; de même, si l'on emploie la transformation du même numéro en posant

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{\gamma}{r_1} - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta,$$

il est évident que la trajectoire transformée est encore algébrique; or, pour les deux transformations, les forces se transforment en d'autres qui ne dépendent que de la distance, et l'on sera ainsi

amené au problème énoncé et résolu par M. Kœnigs [1], qui a trouvé que les seules lois de forces sont μr et $\frac{\mu}{r^2}$.

Nous voyons en résumé que le mouvement peut toujours s'obtenir par des quadratures, lorsque les forces sont de l'une des formes

$$f(r), \quad \frac{f(\theta)}{r^2}, \quad \frac{1}{r^2} f\left(a\cos\theta + b\sin\theta + \frac{c}{r}\right), \quad rf(ax^2 + 2bxy + cy^2).$$

Il résulte alors de la remarque du n° 6, que le mouvement peut encore se ramener à des quadratures si les lois de forces sont de l'une des formes

$$rf(v), \quad rv^3 f(\alpha), \quad rv^3 f\left(a\cos\alpha + b\sin\alpha + \frac{c}{v}\right), \quad rf(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2),$$

où α est l'angle de la vitesse avec l'axe polaire.

8. Les types de lois de forces que nous avons considérés jusqu'à présent et pour lesquels le mouvement s'obtenait par des quadratures étaient représentés en général par des fonctions dépendant de r, θ et v et par l'échange de v, α et r. Il est facile de remarquer qu'il y aura encore réductibilité si, l'angle de la direction de la vitesse avec le rayon vecteur étant désigné par φ, la loi de la force rentre dans le type

$$f(r, v, \varphi).$$

En effet, il suffit de partir de l'équation différentielle de la force vive et du théorème des aires mis sous la forme $rv\sin\varphi = C$, pour ramener le problème à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre et à des quadratures; on remarquera alors que si la loi de la force est de la forme

$$\frac{f(\varphi)}{r^3},$$

le problème se ramène à des quadratures. Considérons en particulier la loi

$$\frac{\cot\varphi}{r^3},$$

---

[1] Kœnigs, *Bulletin de la Société mathématique*, t. XVII.

qui rentre dans le type précédent; on remarque que si à cette expression on ajoute un terme de la forme $\frac{f(\theta)}{r^2}$ et que l'on considère la loi

$$\frac{K\cot\varphi}{r^3}+\frac{f(\theta)}{r^2},$$

où K est une constante arbitraire et f une fonction arbitraire, le mouvement s'obtiendra par des quadratures. En effet, on a

$$\frac{1}{r}\cot\varphi=-\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta},$$

et la formule de Binet nous donne

$$\frac{-C^2}{r^2}\left(\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}+\frac{1}{r}\right)=-\frac{K}{r^2}\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}+\frac{f(\theta)}{r^2},$$

d'où

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}-\frac{K}{C^2}\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}+\frac{1}{r}=-\frac{K}{C^2}f(\theta),$$

équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et avec second membre; on aura donc la trajectoire par des quadratures, puis le temps par une nouvelle quadrature. De l'expression précédente de la force, en s'appuyant sur la remarque du n° 6 et en ayant égard à la formule (11) du n° 5, on déduit une autre loi

$$\frac{rv^4}{K\cot\varphi+vf(\alpha)},$$

pour laquelle le mouvement s'obtiendra encore par des quadratures.

9. Nous avons montré que le mouvement est toujours transformable en un autre réciproque, si la force est centrale. Il nous reste à montrer qu'en général le mouvement est transformable en un autre réciproque, si les équations du mouvement sont de la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} x''=(ax+by)u, \\ y''=(a'x+b'y)u, \end{cases}$$

où u est une fonction arbitraire de x, y, x', y'. On trouve, en suivant la même marche qu'au n° 2, que les deux fonctions f et φ, qui permettent d'obtenir la transformation, doivent être linéaires; de plus, le déterminant $ab' - ba'$ étant différent de zéro, les deux fonctions f et φ seront homogènes; enfin, pour que le problème soit possible, il faut en outre que le déterminant $ab' - ba'$ soit égal à 1. Si cette condition est remplie, la transformation la plus générale sera, à un facteur constant près, qu'on peut supposer égal à 1,

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 = (b'+1)x' - by' \\ y_1 = -a'x' + (a+1)y' \end{cases} \qquad \frac{dt_1}{dt} = \Delta u,$$

où Δ est le déterminant de cette transformation, qui doit être supposé différent de zéro. La condition $ab' - ba' = 1$ semble restreindre la généralité du type (1); mais il est facile de voir qu'il n'en est rien et de s'affranchir de cette condition; il suffit, si cette condition n'est pas remplie, de faire au préalable sur les équations (1) un changement convenable, et le plus simple est d'effectuer un changement linéaire sur la variable indépendante t; les équations après ce changement seront du même type; on pourra alors profiter de la constante introduite pour que le déterminant correspondant soit égal à 1.

10. Dans un travail qui paraîtra prochainement (*Essais sur la réductibilité des équations du mouvement d'un point matériel dans un plan*), nous reviendrons en particulier sur le type (1). Nous terminerons ce travail par une dernière remarque. Le type (1) outre les forces centrales comprend aussi, comme il est évident, le cas d'une force qui fait avec le rayon vecteur un angle constant. L'analogie est complète entre les deux cas; la seule différence est que la transformation n'est pas corrélative dans le dernier cas. Afin de montrer l'analogie entre les deux cas, nous allons examiner le cas d'une force qui fait un angle constant avec le rayon vecteur, et, pour simplifier, nous supposerons que cet angle est droit; toutes les propriétés que nous déterminerons dans ce cas subsisteront pour toutes les valeurs de l'angle. Nous remarquons que pour obtenir les équations du mouvement, il suffit dans (1) de faire

$$a = 0, \qquad b = -1, \qquad a' = 1, \qquad b' = 0,$$

ce qui nous donne

$$(3)\qquad \begin{cases} x'' = -uy, \\ y'' = ux, \end{cases}$$

et d'après (2)

$$(4)\qquad \begin{cases} x_1 = x' + y', \\ y_1 = -x' + y', \end{cases} \qquad \frac{dt_1}{dt} = 2u.$$

Différentiant les relations (4) par rapport à t_1 et ayant égard à (3), on trouve

$$x'_1 = (-y + x)\, u \frac{dt}{dt_1} = \frac{-y + x}{2},$$

$$y'_1 = (y + x)\, u \frac{dt}{dt_1} = \frac{y + x}{2},$$

d'où

$$(5)\qquad \begin{cases} x = x'_1 + y'_1, \\ y = -x'_1 + y'_1. \end{cases}$$

Différentiant (5) par rapport à t, afin d'obtenir les composantes de la force transformée, on aura

$$x' = (X_1 + Y_1) \frac{dt_1}{dt},$$

$$y' = (-X_1 + Y_1) \frac{dt_1}{dt},$$

d'où

$$(6)\qquad X_1 = \frac{-y_1}{2u}, \qquad Y_1 = \frac{x_1}{2u}.$$

Les relations (4) nous montrent que la trajectoire transformée est la courbe hodographe correspondant au mouvement donné et rapportée à un système d'axes, qui sont les bissectrices des axes auxquels le mouvement est rapporté, l'origine des axes étant la même. Les relations (5) nous montrent que la vitesse en un point de la trajectoire transformée est le rayon vecteur correspondant de la trajectoire du mouvement donné ; c'est-à-dire qu'il y a échange entre r et v ; enfin si F et F_1 sont les deux forces dans les deux mouvements, on aura la relation

$$F F_1 = \frac{rv}{2}.$$

Il s'ensuit que, si l'on sait déterminer le mouvement pour une

certaine loi de force, par exemple une loi de force de la forme

$$rf(x, y),$$

on saura encore déterminer le mouvement si la loi de la force est de la forme

$$\frac{r}{f(x'+y',\ y'-x')}.$$

Remarquons enfin que l'angle que la direction de la force fait avec le rayon vecteur se conserve par la transformation; en effet, d'après (6), la force transformée a une direction perpendiculaire au rayon vecteur v de la courbe transformée.

11. Dans ce travail, nous n'avons considéré que le cas où la courbe hodographe est curviligne; on peut voir sans peine que, si la courbe hodographe est rectiligne, cas où le mouvement lui-même est rectiligne, ou bien la direction de la force est constante, le mouvement est encore transformable en un autre réciproque et cela d'une infinité de manières; ainsi, dans le cas d'un mouvement rectiligne, on peut se donner arbitrairement la fonction qui caractérise la réciprocité, puisqu'il n'y aura qu'une seule fonction et déduire de l'équation du mouvement la relation qui lie les temps t et t_1. On pourra aussi se proposer, en ayant égard à la relation qui lie la force donnée et la force transformée, le problème suivant :

Si dans un mouvement rectiligne la loi de la force ne dépend que de la distance et de la vitesse, le mouvement est tautochrone; on demande si le mouvement transformé le sera aussi.

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 JUILLET 1905.

PRÉSIDENCE DE M. BOREL.

Communications :

M. Félix Lucas : *Sur la généralisation du rapport anharmonique.*

M. Zervos : *Sur un problème de mécanique.*

SÉANCE DU 20 JUILLET 1905.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Estanave présente deux modèles de surfaces algébriques applicables sur le paraboloïde de révolution (surfaces de M. G. Darboux). Il expose le procédé par lequel il est arrivé à la réalisation de ces modèles.

M. Roche : *Sur la détermination des surfaces.*

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA GÉNÉRALISATION DU RAPPORT ANHARMONIQUE;

Par M. Félix Lucas.

Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 22 décembre 1873, j'ai indiqué que la notion du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite peut s'étendre, de la manière suivante, au rapport anharmonique de quatre points quelconques du plan.

Désignons par z_1, z_2, z_3, z_4 les coordonnées affixes (de la forme $x + y\sqrt{-1}$) de ces quatre points relativement à un système quelconque d'axes rectangulaires et distinguons les deux groupes z_1, z_2 et z_3, z_4. Le rapport anharmonique sera

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

Il est indépendant du système d'axes rectangulaires adopté, car si l'on place une nouvelle origine au point α, β en faisant tourner d'un angle ω la direction des axes, la nouvelle valeur z' de l'affixe z d'un point quelconque est liée explicitement à celle-ci par la formule

$$z = z' e^{\omega\sqrt{-1}} + \alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

Le rapport anharmonique de deux couples de points n'appartenant pas à une même ligne droite est, par conséquent, fonction seulement de la figure formée par ces quatre points.

On démontre aisément que, *pour que ce rapport soit réel, il est nécessaire et suffisant que les quatre points constituent les sommets d'un quadrilatère inscriptible.*

Pour que ce rapport prenne la valeur -1 (cas dans lequel il reçoit le nom de *rapport harmonique*), il faut et il suffit que les cordes 1, 2 et 3, 4 soient les diagonales d'un quadrilatère inscriptible et représentent deux *droites conjuguées,* c'est-à-dire que chacune d'elles doit contenir le pôle de l'autre relativement au cercle circonscrit.

Avec les systèmes de points en ligne droite et les systèmes de droites convergentes, on peut obtenir des *figures corrélatives*. La notion du rapport anharmonique de quatre points en ligne droite conduit à la notion corrélative du rapport anharmonique de quatre droites convergentes. Désignons par A, B et C, D les deux couples de droites; on sait que leur rapport anharmonique est représenté par l'expression

$$\frac{\sin \widehat{AC}}{\sin \widehat{AD}} : \frac{\sin \widehat{BC}}{\sin \widehat{BD}}.$$

Il nous paraît intéressant de rechercher si l'on peut attribuer un

rapport anharmonique à quatre droites non convergentes, formant deux couples que nous désignerons par les indices 1, 2 et 3, 4.

Décrivons dans le plan une circonférence quelconque et prenons les pôles de nos droites relativement à cette courbe. Comme le rapport anharmonique de ces quatre pôles est indépendant du système d'axes rectangulaires adopté, nous pouvons, pour calculer ce rapport, placer notre origine des coordonnées au centre de la circonférence considérée. Prenons l'équation de cette circonférence

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

et celle de la première droite

$$a_1 X + b_1 Y = c_1 ;$$

la coordonnée affixe du pôle de cette droite est

$$z_1 = R^2 \frac{a_1 + b_1 \sqrt{-1}}{c_1}.$$

Il est à remarquer que les *coordonnées tangentielles* de la droite, relativement à nos axes rectangulaires, sont

$$R^2 \frac{a_1}{c_1} \quad \text{et} \quad R^2 \frac{b_1}{c_1};$$

par conséquent, *l'affixe cartésien du pôle de la droite ne diffère pas de l'affixe tangentiel de cette droite lorsque l'origine des coordonnées est au centre de la circonférence considérée.* Il n'en est plus ainsi lorsque l'origine n'est pas au centre du cercle.

Les valeurs des affixes z_1, z_2 et z_3, z_4 montrent que : *Le rapport anharmonique des pôles de quatre droites relativement à une circonférence est indépendant du rayon de cette courbe.*

Mais ce rapport anharmonique dépend de la position du centre de la circonférence relativement à laquelle on prend les pôles des quatre droites données. Transportons, en effet, la circonférence parallèlement à elle-même de manière que son centre vienne occuper le point quelconque α, β et prenons ce nouveau centre pour origine des coordonnées. L'équation de la droite deviendra

$$a_1 X + b_1 Y = - a_1 \alpha - b_1 \beta + c,$$

et l'affixe de son pôle sera

$$z_1 = R^2 \frac{a_1 + b_1\sqrt{-1}}{-a_1\alpha - b_1\beta + c};$$

par conséquent le rapport anharmonique des affixes des quatre pôles dépendra de α et de β.

Il est clair que nous n'arrivons pas ainsi à généraliser complètement la notion du rapport anharmonique de quatre droites non convergentes. Nous devons nous contenter d'examiner le cas particulièrement intéressant où les quatre pôles des droites considérées ont un rapport anharmonique réel, c'est-à-dire le cas où ces quatre pôles sont les sommets d'un quadrilatère inscriptible.

A cet effet, considérons quatre droites tangentes à une même circonférence et désignons par T_1, T_2 et T_3, T_4 ces deux couples de tangentes. Leurs pôles relativement à la circonférence inscrite ne diffèrent pas de leurs points de contact, dont nous pouvons désigner les affixes par z_1, z_2 et z_3, z_4. Il suffit de construire la figure pour apercevoir la relation

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\widehat{T_1T_3}}{\sin\frac{1}{2}\widehat{T_2T_3}} : \frac{\sin\frac{1}{2}\widehat{T_1T_4}}{\sin\frac{1}{2}\widehat{T_2T_4}}.$$

Il est clair que le second membre de cette égalité est exclusivement fonction de la figure formée par nos quatre tangentes. Il est égal au rapport anharmonique des quatre droites convergentes que l'on obtient en joignant un point quelconque de la circonférence aux quatre points de contact. On sait, d'ailleurs, que ce dernier rapport est égal au rapport anharmonique des quatre points d'intersection de nos quatre tangentes avec une cinquième tangente quelconque à la circonférence, rapport auquel M. Chasles a donné le nom de *rapport anharmonique des quatre tangentes*.

Les diverses considérations que nous avons exposées dans cette Note nous permettent d'énoncer le théorème suivant :

Le rapport anharmonique de quatre droites tangentes à une circonférence est égal :

D'une part, au rapport anharmonique des pôles de ces quatre

droites relativement à une circonférence quelconque concentrique avec la circonférence inscrite,

Et, d'autre part, au rapport anharmonique des affixes tangentiels de ces quatre droites relativement à un système quelconque d'axes rectangulaires ayant pour origine le centre de la circonférence inscrite.

Pour que les quatre droites tangentes à une même circonférence soient en rapport harmonique, il faut et il suffit que les points d'intersection ou sommets de chacun des couples T_1, T_2 et T_3, T_4 soient deux *points conjugués* relativement à la circonférence, ou, en d'autres termes, que la polaire de chacun d'eux passe par l'autre.

SUR QUELQUES INÉGALITÉS DANS LA THÉORIE DE LA FONCTION $\zeta(s)$ DE RIEMANN;

Par M. E. Landau.

I.

La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, pour $R(s) > 1$, par la série

$$(1) \qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s};$$

on sait d'ailleurs que $(s-1)\zeta(s)$ est une fonction entière de s.

D'après l'égalité (1), $\zeta(s)$ reste finie si, la partie réelle σ de $s = \sigma + ti$ étant fixe et supérieure à 1, la partie imaginaire t devient infinie; en effet, on a toujours, pour $\sigma > 1$,

$$|\zeta(\sigma + ti)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma+ti}} \right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^{\sigma+ti}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \zeta(\sigma).$$

Pour $0 < \sigma \leqq 1$, domaine où $\zeta(s)$ peut être représentée par la série

$$(2) \quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) + \frac{1}{(n+1)^s} \right\},$$

M. Mellin [1] a démontré le théorème suivant :

Si σ reste fixe et si t va à l'infini positif [2], *on a*

$$(3)\qquad |\zeta(\sigma+ti)| = O(t^{1-\sigma})\ [3], \qquad \textit{pour} \qquad 0<\sigma<1,$$

$$(4)\qquad |\zeta(\sigma+ti)| = O(\log t), \qquad \textit{pour} \qquad \sigma=1.$$

Voici d'abord une démonstration simplifiée de la formule (3) de M. Mellin [4] :

Le terme général de la somme qui figure dans l'égalité (2) étant identique à

$$-s\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

cette égalité peut s'écrire

$$(5)\quad \zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}\right\} - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

m étant un entier arbitraire dont nous disposerons bientôt; (5) se réduit à

$$(6)\qquad \zeta(s) = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{(m+1)^{s-1}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^s} - s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}.$$

Donc

$$(7)\quad |\zeta(\sigma+ti)| \leqq \frac{1}{|\sigma-1+ti|}\,\frac{1}{(m+1)^{\sigma-1}} + \sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^\sigma} + |\sigma+ti|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}}.$$

---

(1) *Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXIX, n° 4, 1900, p. 48-49).

(2) Il suffit, en vertu de $|\zeta(\sigma+ti)| = |\zeta(\sigma-ti)|$, de considérer les valeurs positives de t.

(3) J'entends par $O(g(t))$, comme d'habitude, une fonction de t telle que son quotient par $g(t)$ reste compris, pour $t=\infty$, entre deux limites finies.

(4) Quant à la formule (4) de M. Mellin, qui n'interviendra pas dans la suite, on en trouvera une démonstration analogue dans mes travaux : *Ueber die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXV, 1903, p. 90) et *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes* (*Mathematische Annalen*, t. LVI, 1903, p. 650-651).

En égalant m au plus grand nombre entier $\leqq t$,

$$m = [t],$$

le second membre de (7) est, pour $0 < \sigma < 1$, de la forme

$$O\left(\frac{1}{t}\right).O(t^{1-\sigma}) + O(t^{1-\sigma}) + O(t).O\left(\frac{1}{t^{\sigma}}\right),$$

d'où, en vertu de (7),

$$(3) \qquad |\zeta(\sigma + ti)| = O(t^{1-\sigma}), \qquad \text{pour } 0 < \sigma < 1,$$

ce qui constitue le théorème de M. Mellin.

Pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, M. Mellin [1] a encore rendu plus précise l'inégalité concernant $|\zeta(\sigma + ti)|$ en tirant parti de la relation fonctionnelle de Riemann

$$(8) \qquad \zeta(1 - s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s),$$

de l'inégalité

$$(9) \qquad \left|\cos\frac{\pi(\sigma + ti)}{2}\right| = \left|\frac{e^{\frac{\pi}{2}(-t+\sigma i)} + e^{\frac{\pi}{2}(t-\sigma i)}}{2}\right| \leqq \frac{e^{-\frac{\pi}{2}t} + e^{\frac{\pi}{2}t}}{2}$$

et du fait connu que

$$(10) \qquad \lim_{t=\infty} \frac{|\Gamma(\sigma + ti)|e^{\frac{\pi}{2}t}}{t^{\sigma-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}} = 1.$$

(8), (9) et (10) donnent, pour σ constant,

$$|\zeta(1 - \sigma - ti)| = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right).O\left(e^{\frac{\pi}{2}t}\right).|\zeta(\sigma + ti)|$$

$$(11) \qquad = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right).|\zeta(\sigma + ti)|,$$

d'où, pour $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, en appliquant (3),

$$|\zeta(1 - \sigma - ti)| = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right).O(t^{1-\sigma}) = O(\sqrt{t}),$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 49.

en d'autres termes [1], pour $0 < \sigma < \frac{1}{2}$,

$$|\zeta(\sigma + ti)| = O(\sqrt{t}),$$

ce qui est préférable à (3).

Le résultat complet de M. Mellin relatif à la bande $0 < R(s) < 1$, le meilleur qu'on possède aujourd'hui, s'énonce donc de la façon suivante :

$$(12) \qquad |\zeta(s)| = O(\sqrt{t}), \qquad \text{pour} \qquad 0 < \sigma \leqq \frac{1}{2},$$

$$(13) \qquad |\zeta(s)| = O(t^{1-\sigma}), \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1.$$

II.

L'objet principal du travail actuel est de prouver les relations

$$(14) \qquad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log t}\right), \qquad \text{pour} \qquad 0 < \sigma \leqq \frac{1}{2},$$

$$(15) \qquad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right), \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1,$$

qui sont évidemment, pour toute valeur de σ en question, plus précises que (12) et (13).

J'y parviendrai en appliquant un théorème remarquable démontré récemment par M. Voronoï, dans un ordre d'idées tout différent.

Soient

$$T(n)$$

le nombre des diviseurs de n et

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} T(n)$$

la fonction sommatoire; en d'autres termes, le nombre des solu-

---

[1] On n'a qu'à écrire $1 - \sigma$ au lieu de σ et qu'à observer que

$$|\zeta(\sigma + ti)| = |\zeta(\sigma - ti)|.$$

tions des inégalités

$$\varkappa\lambda \leqq x, \qquad \varkappa \geqq 1, \qquad \lambda \geqq 1,$$

ou encore

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} \left[\frac{x}{n}\right].$$

Dirichlet avait démontré que

$$\tau(x) = x\log x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}), \tag{16}$$

où C désigne la constante d'Euler.

Avant M. Voronoï, personne n'avait réussi à trouver une relation plus précise que (16). M. Voronoï [1] est parvenu, même par une méthode élémentaire (n'appliquant pas la théorie des fonctions analytiques) à prouver que

$$\tau(x) = x\log x + (2C - 1)x + O(\sqrt[3]{x}\log x). \tag{17}$$

Considérons maintenant la fonction

$$F(s) = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s).$$

C'est une fonction entière, comme on sait. En effet, le seul point douteux serait $s = 1$, et les développements dans le voisinage de $s = 1$ sont

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \ldots,\\
\zeta^2(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} + (C^2 + 2C_1) + \ldots,\\
\zeta'(s) &= -\frac{1}{(s-1)^2} + C_1 + \ldots,\\
-2C\zeta(s) &= -\frac{2C}{s-1} - 2C^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Pour $R(s) > 1$, on a

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n)}{n^s} \quad \text{et} \quad \zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}.$$

---

[1] *Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. CXXVI, 1903, p. 241-282).

La fonction $F(s)$ est donc représentée, au moins pour $R(s) > 1$, par la série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(n) - \log n - 2C}{n^s};$$

en d'autres termes, on a, pour $R(s) > 1$,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \tag{18}$$

où

$$a_n = T(n) - \log n - 2C.$$

Cette équation (18) est, du reste, connue [1]. On n'a pas manqué d'observer que, en vertu de (16),

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{n=1}^{x} a_n = \sum_{n=1}^{x} \{T(n) - \log n - 2C\} &= \tau(x) - \sum_{n=1}^{x} \log n - 2Cx \\ &= x \log x + (2C - 1)x - x \log x + x - 2Cx + O(\sqrt{x}) = O(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

ce qui prouve la convergence de la série (18) au moins pour $R(s) > \frac{1}{2}$, en vertu d'une propriété bien connue des séries de Dirichlet. Pareillement, le théorème (17) montre que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{x} a_n = O(\sqrt[3]{x} \log x), \tag{19}$$

ce qui prouve la convergence de la série (18), au moins pour $R(s) > \frac{1}{3}$. L'égalité (18) est donc valable pour $R(s) > \frac{1}{3}$.

Examinons maintenant comment se comporte la série au second membre de (18) si, $R(s) = \sigma$ étant constant et compris entre $\frac{1}{3}$ et 1, la partie imaginaire t de s augmente indéfiniment. On a,

---

[1] *Voir*, par exemple, Franel, *Intermédiaire des Mathématiciens*, t. III, 1896, p. 103, ou Kronecker, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, t. I, Leipzig, 1901, p. 349-351.

pour m quelconque,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{S(n) - S(n-1)}{n^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{T(n) - \log n - 2C}{n^s} + \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n)\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) - \frac{S(m)}{(m+1)^s}$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{T(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{m} \frac{\log n}{n^s} - 2C \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^s} + s \sum_{n=m+1}^{\infty} S(n) \int_0^1 \frac{du}{(n+u)^{s+1}} - \frac{S(m)}{(m+1)^s},$$

$$|F(s)| \leqq \sum_{n=1}^{m} \frac{T(n)}{n^\sigma} + \sum_{n=1}^{m} \frac{\log n}{n^\sigma} + 2C \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\sigma} + \sqrt{\sigma^2 + t^2} \sum_{n=m+1}^{\infty} |S(n)| \frac{1}{n^{1+\sigma}} + \frac{|S(m)|}{(m+1)^\sigma}.$$

Nous pouvons appliquer au second membre les relations

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{T(n)}{n^\sigma} = O(m^{1-\sigma} \log m) \quad (^1),$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\log n}{n^\sigma} = O(m^{1-\sigma} \log m),$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^\sigma} = O(m^{1-\sigma}),$$

$$|S(n)| < A\sqrt[3]{n} \log n \qquad (\text{pour } n \geqq 2) \quad (^2);$$

nous obtiendrons, en posant $m = \left[t^{\frac{3}{2}}\right]$,

$$|F(s)| = O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right) + O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right) + O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\right)$$

$$+ O(t).O \sum_{n=\left[t^{\frac{3}{2}}\right]+1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{2}{3}+\sigma}} + O\left(\frac{\sqrt[3]{t^{\frac{3}{2}}} \log t}{t^{\frac{3}{2}\sigma}}\right)$$

$$= O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right) + O(t).O\left(t^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\sigma\right)} \log t\right) + O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sigma} \log t\right)$$

$$= O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right).$$

---

(1) *Voir*, par exemple, le Mémoire de M. Voronoï, p. 281.

(2) A désigne une constante absolue. Cette inégalité n'est autre chose que (19).

Or, on a

$$F(s) = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s);$$

donc, pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$,

$$|\zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right),$$

$$|\zeta^2(s)| = |-\zeta'(s) + 2C\zeta(s) + \{\zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)\}|,$$

$$\leqq |\zeta'(s)| + 2C|\zeta(s)| + O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right). \tag{20}$$

Dans (20), le terme $2C|\zeta(s)|$ peut être négligé vis-à-vis du dernier terme $O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)} \log t\right)$, en vertu du théorème (3) de M. Mellin

$$|\zeta(s)| = O(t^{1-\sigma}).$$

Quant à $|\zeta'(s)|$, on peut traiter cette expression par la méthode appliquée plus haut à $|\zeta(s)|$. On a, en différentiant (6), pour $R(s) > 0$,

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2}\frac{1}{(m+1)^{s-1}} - \frac{1}{s-1}\frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}} - \sum_{n=1}^{m+1}\frac{\log n}{n^s}$$
$$- \sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}} + s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1 \frac{u\log(n+u)}{(n+u)^{s+1}}\,du,$$

$$|\zeta'(\sigma+ti)| \leqq \frac{1}{|\sigma-1+ti|^2}\frac{1}{(m+1)^{\sigma-1}} + \frac{1}{|\sigma-1+ti|}\frac{\log(m+1)}{(m+1)^{\sigma-1}}$$
$$+ \sum_{n=1}^{m+1}\frac{\log n}{n^\sigma} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\sigma}} + |\sigma+ti|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^{1+\sigma}},$$

d'où, pour $m = [t]$, en supposant $0 < \sigma < 1$ (¹),

$$|\zeta'(s)| = O\left(\frac{1}{t^2}t^{1-\sigma}\right) + O\left(\frac{1}{t}\log t.t^{1-\sigma}\right)$$
$$+ O(t^{1-\sigma}\log t) + O(t^{-\sigma}) + O(t\log t.t^{-\sigma}) = O(t^{1-\sigma}\log t),$$

quantité négligeable vis-à-vis du dernier terme de l'inégalité (20).

(¹) Pour notre objet, il s'agit seulement des valeurs de σ comprises entre $\frac{1}{3}$ et 1.

Cette inégalité se réduit donc à

$$|\zeta^2(s)| = O\left(t^{\frac{3}{2}(1-\sigma)}\log t\right),$$

$$(21) \qquad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right).$$

Cette relation (21) vient d'être démontrée pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$.

Pour $\frac{1}{3} < \sigma < 1$, on peut conclure de (20) et de

$$(11) \qquad |\zeta(1-\sigma-ti)| = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}\right).|\zeta(\sigma+ti)|$$

que

$$|\zeta(1-\sigma-ti)| = O\left(t^{\sigma-\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right) = O\left(t^{\frac{1}{4}(1+\sigma)}\sqrt{\log t}\right);$$

donc, en remplaçant σ par $1-\sigma$, pour $0 < \sigma < \frac{2}{3}$,

$$|\zeta(\sigma-ti)| = |\zeta(\sigma+ti)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log t}\right),$$

$$(22) \qquad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log t}\right).$$

Pour $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{2}{3}$, les deux formules (21) et (22) sont valables; on voit aisément que, pour $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{2}{3}$, la première est la plus précise et que, pour $\frac{1}{3} < \sigma < \frac{1}{2}$, c'est la seconde.

J'arrive donc au résultat final

$$(14) \qquad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\log t}\right), \qquad \text{pour} \qquad 0 < \sigma \leqq \frac{1}{2},$$

$$(15) \qquad |\zeta(s)| = O\left(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log t}\right), \qquad \text{pour} \qquad \frac{1}{2} \leqq \sigma < 1,$$

annoncé au commencement de ce paragraphe.

III.

Je viens de démontrer un nouveau théorème sur la fonction $\zeta(s)$, en appliquant un théorème de la théorie élémentaire des fonctions numériques. Dans un but inverse, je vais maintenant préciser une formule connue de la théorie élémentaire des fonctions numériques en me servant de certaines propriétés analytiques de la fonction $\zeta(s)$ trouvées il y a quelques années.

Voici la formule connue [1] dont il s'agit :

$$(23) \qquad Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}),$$

où $Q(x)$ désigne le nombre des nombres $\leqq x$ qui ne sont divisibles par aucun carré > 1, en d'autres termes, qui ne contiennent chacun de leurs facteurs premiers qu'à la première puissance. On peut aussi définir $Q(x)$ par la somme

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{x} |\mu(n)|^2,$$

où $\mu(n)$ désigne la fonction de Möbius. La relation (23) se démontre, comme on sait, facilement au moyen de l'identité connue

$$(24) \qquad Q(x) = \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n) \left[\frac{x}{n^2}\right];$$

en effet, on tire de (24)

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n) \left(\frac{x}{n^2} - \theta_{n,x}\right),$$

où

$$0 \leqq \theta_{n,x} < 1,$$

d'où

$$\begin{aligned} Q(x) &= x \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \frac{\mu(n)}{n^2} - \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(n)\, \theta_{n,x} \\ &= x \sum_{n=1}^{[\sqrt{x}]} \frac{\mu(n)}{n^2} + O(\sqrt{x}) \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} - x \sum_{n=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} + O(\sqrt{x} \\ &= \frac{6}{\pi^2} x + O\left(x \sum_{n=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

---

[1] *Voir*, par exemple, GEGENBAUER, *Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie* (*Denkschriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in*

Le quotient

$$(25)\qquad \frac{Q(x) - \frac{6}{\pi^2}x}{\sqrt{x}}$$

reste donc compris, pour tous les $x \geqq 1$, entre deux limites finies. Je prouverai dans ce qui suit que le quotient (25) tend, pour $x = \infty$, vers la limite o [1].

Pour cela, j'appliquerai le théorème suivant, que j'ai déduit [2], il y a quelques années, des recherches modernes sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann :

$$(26)\qquad M(x) = \sum_{n=1}^{x} \mu(n) = O\left(\frac{x}{\log x \log\log x}\right).$$

On a [3]

$$(27)\qquad Q(x) = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right] = \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}-1} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right] + \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right].$$

Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, t. XLIX, 1885, p. 47); et Berger, *Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres* (*Nova Acta regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis,* 3e série, t. XIV, 1887, p. 110).

(1) J'ai déjà fait allusion à ce théorème, sans entrer dans les détails, dans mon Mémoire *Ueber die zahlentheoretische Function* $\mu(k)$ (*Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien,* Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, t. CXII, IIa, 1903, p. 562, note 3).

(2) *Ueber die asymptotischen Werte einiger zahlentheoretischer Functionen* (*Mathematische Annalen,* t. LIV, 1901, p. 585). Dans mon Mémoire cité dans la note précédente, j'ai démontré un théorème beaucoup plus précis; mais il me paraît intéressant de constater que la relation (26) suffit pour le but actuel. On peut aussi aborder le problème directement en appliquant à la fonction génératrice

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q(n) - Q(n-1)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

les théorèmes sur la fonction $\zeta(s)$.

(3) Pour simplifier, j'écris les limites de sommation sans le signe [ ]. Une somme étendue de a à b doit signifier que la variable parcourt les valeurs entières de $[a]$ à $[b]$.

Dans (27), on a d'abord

$$\sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}-1} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}-1} \mu(n)\left(\frac{x}{n^2}-\theta_{n,x}\right) = x \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}-1} \frac{\mu(n)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} \frac{M(n)-M(n-1)}{n^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x - x \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} M(n)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$+ x\frac{M\left(\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]-1\right)}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]^2} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x + x\,O \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} \frac{n}{\log n \log\log n}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$+ x\,O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x.\log x.\log\log x}\cdot\frac{(\log\log x)^2}{x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x + x\,O \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\infty} \frac{1}{n^2\log n} + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$= \frac{6}{\pi^2}x + x\,O\left(\frac{\log\log x}{\sqrt{x}.\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right)$$

$$(28) \qquad = \frac{6}{\pi^2}x + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right).$$

La dernière somme qui figure dans l'équation (27) est

$$\sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right] = \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} \{M(n)-M(n-1)\}\left[\frac{x}{n^2}\right]$$

$$= \sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} M(n)\left(\left[\frac{x}{n^2}\right]-\left[\frac{x}{(n+1)^2}\right]\right)$$

$$- M\left(\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]-1\right)\left[\frac{x}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]^2}\right]$$

$$= O\sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}} \frac{n}{\log n\log\log n}\left(\left[\frac{x}{n^2}\right]-\left[\frac{x}{(n+1)^2}\right]\right)$$

$$+ O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x.\log x.\log\log x}(\log\log x)^2\right)$$

$$= O\frac{\sqrt{x}}{\log x\log\log x}\sum_{n=\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}}^{\sqrt{x}}\left(\left[\frac{x}{n^2}\right]-\left[\frac{x}{(n+1)^2}\right]\right)+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

$$= O\frac{\sqrt{x}}{\log x\log\log x}\cdot\left[\frac{x}{\left[\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right]^2}\right]+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

$$= O\left(\frac{\sqrt{x}\log\log x}{\log x}\right)+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right)$$

$$(29)\qquad = O\left(\frac{\sqrt{x}\log\log x}{\log x}\right).$$

En combinant (27), (28) et (29), on obtient finalement

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\log\log x}\right),$$

d'où

$$\lim_{x=\infty}\frac{Q(x)-\frac{6}{\pi^2}x}{\sqrt{x}} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

SUR CERTAINS GROUPES D'ORDRE $p^m q^n$;

Par M. J. de Séguier.

Dans la recherche des groupes d'ordre $p^m q^n$ (p, q premiers) pour les premières valeurs de m et de n, un cas s'impose de suite à l'attention : c'est celui où le groupe considéré G contient normalement un g_{p^m} abélien principal [1] A, aucun $e_{(q^n)}$ n'étant permutable à tout élément de A.

C'est ce cas et un autre cas voisin que je vais considérer.

1. B étant un g_{q^n} quelconque de G, on a $G = AB$, et comme B divise ici le groupe $L(m, p)$ des isomorphismes de A [2], G divise l'holomorphe K de A. Je supposerai K, L, et B pris sous la forme de groupes concrets de substitutions linéaires, en sorte que G est complètement déterminé par B (tout système de générateurs réels de B joint à une base de A forme un système de générateurs de G sur lequel on lit les équations du groupe). Soient $\mathfrak{B}$ un système de générateurs de B, $(\mathfrak{B})$ l'ensemble des conjugués de $\mathfrak{B}$ dans L; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, ..., des systèmes de générateurs de B non conjugués dans L. J'appellerai l'ensemble $(\mathfrak{B}) + (\mathfrak{B}') + \ldots$ la *catégorie* des systèmes des générateurs de B. Si $\mathfrak{B}$ parcourt un système de *représentants* des catégories des divers g_{q^n} de L, $\{A, \mathfrak{B}\}$ fournira tous les types cherchés chacun une fois, car deux g_{q^n} distincts de L ne peuvent être formés des mêmes isomorphismes de A avec lui-même.

On remarquera que, l'ordre de B étant premier à p, la forme canonique d'un élément quelconque de B est complètement déterminée par la fonction caractéristique de cet élément.

---

(1) Je me servirai de la même terminologie et des mêmes notations que dans mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), auxquels je renverrai par la lettre *E*.

(2) *Cf.* Hölder, *M. A.*, t. XLVI, 1895, p. 325. Le groupe $L(m, p)$ est le groupe des substitutions linéaires (mod p) à m variables. Sur ce point et sur la définition de l'holomorphe, *voir* Moore, *S. M. A.*, t. II, 1895, p. 33; Hölder, *loc. cit.*, ou Burnside, *Theory of groups*, p. 343, 228.

2. Soit désormais $B = \{b\}$ cyclique. On sait construire *a priori* toutes les formes canoniques de b. Cherchons les b^β ayant même forme canonique que b. Si $(b) = (b^\beta)$ (β est alors premier à q), on a évidemment $(b^x) = (b^{\beta x})$. Si donc $(b) = (b^\beta) = (b^{\beta'})$, on a $(b) = (b^{\beta\beta'})$. Donc $\beta, \beta', \ldots$ forment un groupe B_0 qui divise le $g_{\varphi(q^n)}$ engendré par une racine primitive α de q^n. B_0 est donc cyclique; soit $B_0 = \{\beta\}$. $(B_0, 1) = \delta$ est l'ordre de $\beta \bmod q^n$. (b^x), $(b^{\beta x}), \ldots, (b^{\beta^{\delta-1}x})$ coïncidant quel que soit x, les $\varphi(q^n)$ classes (b^x) où x est premier à q coïncident δ à δ et les $\frac{\varphi(q^n)}{\delta}$ classes distinctes se réunissent en une catégorie. Supposons que q^{n-i} soit diviseur propre de $p^{r_i} - 1$ ($i = 0, \ldots, n$; $r_0 = r$). Les facteurs irréductibles de la fonction caractéristique Δ_b de b appartiendront chacun à un des q^{n-i}. Soit ρ_i le nombre des facteurs irréductibles appartenant à l'exposant q^{n-i} (ils sont tous de degré r_i), ρ_{is} le nombre de ceux qui sont de multiplicité s que je désignerai par $P_{is1}, \ldots, P_{is\rho_{is}}$. $\rho_0 = \rho$ sera $\geqq 1$ et $\rho_n = m - \Sigma_0^{n-1} \rho_i r_i$ est le nombre des facteurs linéaires de racine 1. Si ξ est une racine de P_{ist} et ξ' de $P_{ist'}$ ($t' \neq t$), ξ^x sera, pour x premier à q, de même ordre que ξ et distinct de ξ'^x, car, si $xx' \equiv 1 \bmod q^n$, l'égalité $\xi^x \equiv \xi'^x$ (je sous-entendrai toujours le module p) élevée à la puissance x' donnera $\xi \equiv \xi'$. Les nombres r_i, ρ_{is} sont donc les mêmes pour b^x que pour b, et l'on pourra dire que G, b, (b), Δ_b, B *appartiennent* à la *répartition* $(\rho_{01}, \rho_{02}, \ldots; \rho_{11}, \rho_{12}, \ldots)$ (lorsque les ρ_{is} seront donnés, je supprimerai dans la parenthèse ceux qui sont tous nuls à partir d'un certain rang).

B_0 étant formé de tous les $x \bmod q^n$ tels que $(b^x) = (b)$ ou $\Delta_{b^x} = \Delta_b$, à chaque x de B_0 répondra une substitution (z, z^x) des racines z de Δ_b. Donc B_0 est isomorphe au groupe $B_1 = \{(z, z^\beta)\}$ et l'*on peut définir* β *et* δ *par la condition que* (z, z^β) *soit une substitution d'ordre maximum* δ *conservant* Δ_b. Je dirai que δ est l'*indice* de Δ_b. Si z appartient à l'exposant q^{n-i}, le cycle de (z, z^β) où il figure est $(z, z^\beta, \ldots, z^{\beta^{\delta_i - 1}})$, δ_i étant l'exposant auquel appartient $\beta \bmod q^{n-i}$ [δ_i divise δ_{i-1} et $\delta_0 = \delta$ divise $\varphi(q^n)$]. Si β^{ω_i} est la première puissance de β qui soit congrue $\bmod q^{n-i}$ à une puissance de p, (z, z^β) permute $P_{is1}, \ldots, P_{is\rho_{is}}$ par cycles de ω_i; donc ω_i divise ρ_{is}, ρ_{is} divise δ_i, et le plus petit commun multiple ϖ des ω_i divise celui des ρ_{is} et celui δ des δ_i. β^ϖ est la première puissance

de β congrue mod q^n à une puissance de p, et $(z, z^\beta)^\varpi$ est la première puissance de (z, z^β) qui ne permute pas les P_{ist}. Donc $(z, z^\beta)^{\varpi r} = 1$ et δ divise ϖr. On remarquera que B_1 devant contenir $\{(z, z^p)\}$, δ est multiple de r. Si $\delta = kr$, $(z, z^\beta)^k$ est d'ordre r; donc β^k est d'ordre r mod q^n et est par suite une puissance de p (B_1 n'a qu'un diviseur d'ordre r qui est $\{(z, z^p)\}$). Donc k est multiple de ϖ et $\delta = \varpi r$.

Soit n_δ le nombre des fonctions caractéristiques d'indice δ répondant à une répartition $(\rho_{01}, \ldots)$. *Le nombre* $N_{\rho_{01}, \ldots}$ *des types de* G *répondant* à la répartition sera $\Sigma_\delta \frac{\delta n_\delta}{\varphi(q^n)}$.

3. En particulier la répartition (1) donne lieu à $\frac{\varphi(q^n)}{r}$ fonctions caractéristiques. Si $r > 1$, on peut supposer β est, pour chacune d'elles, $\equiv p$ mod q^n, et comme p est d'ordre r mod q^n, on a $\delta = r$, d'où $N_1 = 1$. Soit donc θ d'ordre q^n dans C_{p^r} et $\theta^r = \Sigma_0^{r-1} \alpha_i \theta^i$. Si $n = 1$,

$$\alpha_0 = (-1)^{r-1} \theta^{\Sigma_0^{r-1} p^i} = (-1)^{r-1}$$

(q, diviseur propre de $p^r - 1$, divise $\Sigma_0^{r-1} p_i$). La forme canonique générale de b répondant à la répartition (1) est

$$| y'_i = \theta^{p^i} y_i ; y'_j = y_j | \qquad (i = 0, \ldots, r-1 ; j = r, \ldots, m-1);$$

y_i est une fonction des variables réelles à coefficients dans C_{p^r}, y_j une fonction des variables réelles à coefficients dans C_p. Si $y_i = \Sigma_0^{r-1} \theta^{kp^i} x_k$, $y_j = x_j$, la forme canonique réelle qui s'obtient en prenant les x pour variables est

$$b = | x'_0 = \alpha_0 x_{r-1}, x'_i = x_{i-1} + \alpha_i x_{r-1}, x'_j = x_j |$$
$$(i = 1, \ldots, r-1 ; j = r, \ldots, m-1).$$

Les substitutions

$$a_k = | x'_k = x_k + 1, x'_i = x_i | \qquad (i, k = 0, \ldots, m-1 ; i \neq k)$$

engendrent A, et les équations de G s'obtiennent en adjoignant à celles de A

$$b^{q^n} = 1, \qquad b^{-1} a_h b = a_{h+1} \qquad (h = 0, \ldots, r-2),$$
$$b^{-1} a_{r-1} b = \Pi_0^{r-1} a_i^{\alpha_i}, \qquad b^{-1} a_k b = a_k \qquad (k = r, \ldots, m-1).$$

Comme ces équations sont vérifiées par des substitutions engendrant effectivement un $g_{p^m q^n}$, on est assuré *a priori* qu'elles définissent bien un $g_{p^m q^n}$ (*E.*, 18). Il est clair que $\{b\}$ n'est primaire [1] que si $r = m$, et le groupe G correspondant divise le $g_{p^m(p^m-1)}$ de Mathieu. On voit d'ailleurs que, pour la répartition (1) ($r < m$), G est le produit direct d'un diviseur du $g_{p^r(p^r-1)}$ de Mathieu par un groupe abélien principal. Ces résultats complètent ceux obtenus par MM. Miller et Moreno sur les groupes dont tous les diviseurs sont abéliens (*Transact. of the Am. math. Soc.*, t. IV, 1903, p. 398).

4. *Soit* $n = 1$ *et* $\rho = 2$. Considérons d'abord la répartition (2). Elle donne lieu à $\frac{1}{2}\frac{q-1}{r}\left(\frac{q-1}{r} - 1\right)$ fonctions caractéristiques de la forme $\Delta_b = PP'$, P et P' étant distincts, irréductibles, de degré r. Si $r > 1$, q est ici > 2. Si $r = 1$ et $q = 2$, le nombre des fonctions caractéristiques est 1 et il n'y a qu'un type dont on trouvera les équations au n° 5. *Soit donc* $q > 2$ et $p \equiv g^\pi \bmod q$, g étant une racine primitive de $q\left(\pi = \frac{q-1}{r}\right)$. On sait *a priori* que $\delta = r$ ou $2r$. Cherchons dans quel cas $\delta = 2r$. Alors β^2 est de la forme $g^{\pi\tau}$, τ étant premier à r et pris mod r. π ne peut pas être impair, car r et τ seraient pairs et $\beta \equiv \pm p^{\frac{\tau}{2}}$ serait une puissance de $p\left(-1 \equiv p^{\frac{r}{2}} \bmod q\right)$. Soit donc $\pi = 2\pi'$ et d'abord r pair $= 2r'$. Alors $-1 \equiv p^{r'} \bmod q$ et les racines de tout polynome P ou P' sont deux à deux inverses l'une de l'autre. De plus τ est impair, sans quoi $\beta = p^{\frac{\tau}{2}}$ serait une puissance de p. En remplaçant au besoin β par β^{τ_1} ($\tau\tau_1 \equiv 1 \bmod r$) on peut supposer que $\beta^2 \equiv g^\pi$ et que $\beta \equiv g^{\pi'}$. Alors (z, z^β) est bien d'ordre $2r$ et pour chaque P il y a un seul P' ayant les racines z^β, c'est-à-dire que PP' a $\frac{q-1}{2r} = \frac{\pi}{2}$ déterminations pour lesquelles $\delta = 2r$. Soit maintenant r impair. En changeant au besoin τ en $\tau + r$, on peut supposer τ pair $= 2\tau'$. Alors $\beta \equiv -p^{\tau'}$, P' est déterminé par la condition que ses racines

---

[1] JORDAN, *Traité des substitutions*, p. 110.

soient les inverses de celles de P et il y a encore $\frac{\pi}{2}$ fonctions PP' telles que $\delta = 2r$. Donc *si p est non carré* mod q (*alors π est impair donc r pair*), $\delta = r$; $n_r = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1)$; $N_2 = \frac{q-r-1}{2r}$. *Si p est carré* mod q (*alors π est pair*), $\delta = r$ *ou* $2r$; $n_{2r} = \frac{\pi}{2}$, $n_r = \frac{1}{2}\pi(\pi-1) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2} - \pi$; $N_2 = \frac{q-1}{2r}$.

Soit par exemple $r = 1$. En remplaçant au besoin b par une de ses puissances, on peut toujours représenter la catégorie de b par

$$b_\lambda = | x'_0 = \alpha x_0,\ x'_1 = \alpha^\lambda x_1,\ x'_i = x_i | \qquad (i = 2, \ldots, m-1;\ \lambda \not\equiv 1 \bmod q),$$

α étant une racine primitive arbitraire de $\alpha^q \equiv 1$. Les $\frac{q-1}{2}$ types s'obtiennent alors en faisant parcourir à λ un système de valeurs $\not\equiv 1$ mod q dont aucune ne soit inverse *d'une autre* mod q; car, pour que b_λ et $b_{\lambda'}$ appartiennent à la même catégorie, c'est-à-dire pour que b_λ^u soit conjuguée de $b_{\lambda'}$ dans $L(m, p)$, il faut et suffit (si $\lambda \not\equiv \lambda'$ mod q) que $\alpha^u \equiv \alpha^{\lambda'}$, $\alpha^{u\lambda} \equiv \alpha$ ou que $\lambda\lambda' \equiv 1$ mod q. De là les types

$$a_i^p = b^q = 1, \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad b^{-1} a_0 b = a_0^\alpha, \quad b^{-1} a_1 b = a_1^{\alpha^\lambda}, \quad b^{-1} a_h b = a_h;$$
$$(i, j = 0, \ldots, m-1;\ h = 2, \ldots, m-1).$$

La répartition (0, 1) donne de suite $N_{0,1} = 1$. Les équations du type correspondant se déduisent des précédentes en y faisant $\lambda = 1$.

5. Considérons pour $r = 1$ la répartition $(\rho_{01}, \ldots, \rho_{0v})$. n_δ ne sera $\neq 0$ que si : 1° δ divise $\rho_{01} = h_1\delta, \ldots, \rho_{0v} = h_v\delta$ et $\varphi(q^n) = Q = K\delta$; 2° on peut ranger $\Sigma\rho_{0s} = \rho_0 = \rho$ des Q nombres z appartenant à l'exposant q^n en séries de δ termes, la $i^{\text{ième}}$ étant $z_i, z_i^\beta, \ldots, z_i^{\beta^{\delta-1}}$. Alors on pourra prendre pour les ρ_{01} P_{01t} les racines de h_1 quelconques de ces séries, puis pour les ρ_{02} P_{02t} celles de h_2 quelconques des séries restantes, etc. Le nombre

$$\binom{K}{h_1}\binom{K-h_1}{h_2}\cdots = \frac{K!}{h_1!\,h_2!\ldots}$$

des déterminations de Δ_b ainsi obtenues, est $\geqq n_\delta$ (car on peut seulement affirmer que ces Δ_b ont pour indice un multiple de δ); il est égal à δ si δ est le plus grand commun diviseur des ρ_{0s} et

de Q; si ce plus grand commun diviseur d est premier, δ prend les seules valeurs $1, d$, et $n_1 = \frac{Q!}{\rho_{01}!\rho_{02}!\ldots} - n_d$.

A chaque choix des z_i répondent une forme canonique de b et des équations de G qui s'écrivent immédiatement. Mais il est plus simple encore de former à la fois tous les types répondant à une valeur de ρ. La forme canonique générale correspondante de b est $|x'_i = \theta_i x_i,\ x'_j = x_j|$ $(i = 0, \ldots, \rho - 1;\ j = \rho, \ldots, m - 1;\ \theta_i \not\equiv 1)$. Les types de G qu'elle détermine sont

$$a_h^p = b^{q^n} = 1, \qquad a_h a_k = a_k a_h, \qquad b^{-1} a_i b = a_i^{\theta_i}, \qquad b^{-1} a_j b = a_j$$
$$(h, k = 0, \ldots, m - 1;\ i = 0, \ldots, \rho - 1;\ j = \rho, \ldots, m - 1).$$

On peut prendre $\theta_i = \alpha^{\lambda_i} (\not\equiv 1)$, α étant une racine primitive arbitraire de $\alpha^{q^n} \equiv 1$, $\lambda_0 = 1$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\rho-1}$ parcourant des valeurs telles que, dans deux des systèmes $\alpha, \alpha^{\lambda_1}, \ldots, \alpha^{\lambda_{\rho-1}}$, les exposants n'aient jamais de valeurs proportionnelles mod q^n, quel que soit l'ordre où l'on prend les α^{λ_i}.

6. Cherchons enfin les $g_{p^m q^n}$ G *ayant un* g_{p^m} *normal* A *de figure* (1)(11...1) *et un* g_{q^n} *cyclique, lorsque* G/D (D *étant le central de* A) *répond à la répartition* (1) *pour* $r = m - 1$.

m étant impair (*E.*, 143), soit $m = 2\nu + 1$. G aura des équations de la forme (*E.*, 144, 145)

$$a^p = j^{q^n} = 1, \qquad c_1^p = a^\varepsilon, \qquad d_1^p = a^\eta, \qquad c_h^p = d_h^p = 1 \qquad (h = 2, \ldots, \nu),$$
$$c_i c_k = c_k c_i, \qquad d_i d_k = d_k d_i, \qquad c_i d_k = d_k c_i, \qquad c_i^{-1} d_i c_i = d_i a$$
$$(i, k = 1, \ldots, \nu;\ i \neq k),$$

$$j^{-1} a j = a^\xi, \qquad j^{-1} c_i j = a^{\lambda_i} \Pi_l c_l^{\alpha_{li}} d_l^{\beta_{li}}, \qquad j^{-1} d_i j = a^{\mu_i} \Pi_l c_l^{\gamma_{li}} d_l^{\delta_{li}};$$
$$\text{si } p > 2, \quad \varepsilon = 0, 1, \qquad \eta = 0; \qquad \text{si } p = 2, \quad \varepsilon = \eta = 0, 1,$$

les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\xi \text{ et le déterminant } \Delta \text{ des } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ sont } \not\equiv 0,$$

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_j(\alpha_{ji}\delta_{jk} - \beta_{ji}\gamma_{jk}) \equiv 0 \text{ si } i \neq k, \quad \equiv \xi \text{ si } i = k, \\ \Sigma_j(\alpha_{ji}\beta_{jk} - \beta_{ji}\alpha_{jk}) \equiv \Sigma_j(\gamma_{ji}\delta_{jk} - \delta_{ji}\gamma_{jk}) \equiv 0, \end{array} \right. \qquad i, j, k = 1, \ldots, \nu,$$

et, en observant que $\Pi_l c_l^{\alpha_{li}} d_l^{\beta_{li}}$ par exemple est égal à

$$a^{\frac{n(n-1)}{2} \Sigma_k \alpha_{ki}\beta_{ki}} \Pi_k c_k^{n\alpha_{ki}} d_k^{n\beta_{ki}}$$

et que, si $p = 2$, tout nombre x est $\equiv x^2$,

$$(2) \quad \text{si } p > 2 \text{ et } \varepsilon = 1, \quad \alpha_{11} \equiv \xi, \quad \alpha_{1h} \equiv 0, \quad \gamma_{1i} \equiv 0, \quad h > 1, \quad i \geqq 1,$$

$$(3) \quad \text{si } p = 2, \quad \Sigma_k \alpha_{ki}\beta_{ki} + \varepsilon(\alpha_{1i}^2 + \beta_{1i}^2) \equiv \Sigma_k \gamma_{ki}\delta_{ki} + \varepsilon(\gamma_{1i}^2 + \delta_{1i}^2) \equiv \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Ce sont les conditions d'automorphisme, etc. (*E.*, 19). Un calcul direct montre que, d'après (1), $\Delta^2 \equiv \xi^{2\nu}$.

7. Pour l'intelligence de ce qui va suivre je présenterai d'abord sous une forme particulière des résultats dus à M. Jordan (*Traité des substitutions*).

Remplaçons un instant l'équation $j^{q^n} = 1$ par $j^M = 1$ et considérons j comme un isomorphisme de A avec lui-même, remplaçant

$$a \text{ par } a^\xi = a', \quad c_i \text{ par } a^{\lambda_i}\Pi_l c_l^{\alpha_{li}} d_l^{\beta_{li}} = a^{\lambda_i} c_i',$$
$$d_i \text{ par } a^{\mu_i}\Pi_l c_l^{\gamma_{li}} d_l^{\delta_{li}} = a^{\mu_i} d_i'.$$

On aura les équations de $\{A, j\}$. Or le groupe des substitutions $|Dc_i, Dd_i; Dc_i', Dd_i'|$ $(D = \{a\})$ qui représente l'action du groupe J des isomorphismes de G sur G | D est le groupe H des isomorphismes contragrédients de G (Hölder, Burnside, *loc. cit.*) et divise le groupe $L(2\nu, p)$ des isomorphismes de G | D. G | D est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}$ des substitutions $|x_i, y_k; x_i + g_i, y_k + h_k|$ et H à celui $\mathfrak{H}$ des substitutions

$$(4) \qquad s = |x_i, y_i; \Sigma_k(\alpha_{ik}x_k + \gamma_{ik}y_k), \Sigma_k(\beta_{ik}x_k + \delta_{ik}y_k)|.$$

Un calcul direct montre d'après (1) que

$$s' = |x_i, y_i; \Sigma_k(\alpha_{ik}'x_k + \gamma_{ik}'y_k), \Sigma_k(\beta_{ik}'x_k + \delta_{ik}'y_k)|$$

vérifie $ss' = 1$ toujours et seulement si $\xi\alpha_{ik}' = \delta_{ki}$, $\xi\gamma_{ik}' = -\gamma_{ki}$, $\xi\beta_{ik}' = -\beta_{ki}$, $\xi\delta_{ik}' = \alpha_{ki}$. Les conditions (1), (2), (3) écrites pour s^{-1} donnent donc les conditions suivantes respectivement équivalentes *en vertu de* (1) :

$$(1') \quad \begin{cases} \Sigma_j(\alpha_{ij}\delta_{kj} - \beta_{ij}\gamma_{kj}) \equiv 0 \text{ si } i \neq k, \quad \equiv \xi \text{ si } i = k, \\ \Sigma_j(\alpha_{ij}\beta_{kj} - \beta_{ij}\alpha_{kj}) \equiv \Sigma_j(\delta_{ij}\delta_{kj} - \delta_{ij}\gamma_{kj}) \equiv 0, \end{cases} \quad i, j, k = 1, \ldots, \nu,$$

$$(2') \quad \text{si } p > 2 \text{ et } \varepsilon = 1, \quad \delta_{11} \equiv \xi^2, \quad \delta_{h1} \equiv 0, \quad \gamma_{i1} \equiv 0, \quad h > 1, \quad i \geqq 1,$$

$$(3') \quad \text{si } p = 2, \quad \Sigma_k \gamma_{ik}\delta_{ik} + \varepsilon(\beta_{1i}^2 + \delta_{1i}^2) \equiv \Sigma_k \alpha_{ik}\gamma_{ik} + \varepsilon(\alpha_{i1}^2 + \gamma_{i1}^2) \equiv \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Comme (1′) donne, d'après (2), $\delta_{11} \equiv 1$, (2′) montre que $\xi^2 \equiv 1$ (lorsque p est $> r$ et $\varepsilon = 1$). La condition (1) ou (1′) qui dérive des équations de A est nécessaire et suffisante pour que l'exposant $F = \Sigma_i(X_i y_i - Y_i x_i)$ de a dans l'un des commutateurs de $\Pi_i c_i^{x_i} d_i^{y_i}$, $\Pi_i c_i^{X_i} d_i^{Y_i}$ garde sa forme (mod p) au facteur ξ près lorsqu'on lui applique la substitution s (opérant sur les X_i, Y_i comme sur les x_i, y_i). Si s multiplie F par ξ, s^{-1} multiplie F par ξ^{-1}. Si $p > 2$, (2) ou (2′) qui dérive des équations de A est la condition nécessaire et suffisante pour que le carré x_1^2 de l'exposant de a dans $(\Pi_i c_i^{x_i} d_i^{y_i})^p$ garde sa forme (mod p) : si $p = 2$, (3) ou (3′) est nécessaire et suffisante pour que l'exposant $\Sigma_i x_i y_i + \varepsilon(x_i^2 + y_i^2)$ de a dans $(\Pi c_i^{x_i} d_i^{y_i})^2$ garde sa forme (mod 2).

On voit donc que les substitutions s vérifient (1) ou (1′) quand $\xi(\not\equiv 0)$ et les coefficients sont dans un C_π ($\pi = p^m$) formant un groupe $\mathcal{A}(2\nu, \pi)$. C'est le *groupe linéaire abélien général* quand ξ reste indéterminé. Son diviseur relatif à $\xi = 1$ est le *groupe linéaire abélien spécial* $\mathcal{A}_1(2\nu, \pi)$. Lorsque $p = 2$, le diviseur $\mathfrak{H}_0(2\nu, \pi)$ de $\mathcal{A}$ vérifiant (3) ou (3′) pour $\varepsilon = 0$ est le *premier groupe hypoabélien* d'ordre $\frac{2\Pi_1^\nu(\pi^{2i}-1)\pi^{2i}}{\pi^{2\nu}(\pi^\nu+1)}$ (Jordan, *loc. cit.;* Dickson, *Linear groups*). Le diviseur $\mathfrak{H}_d(2\nu, \pi)$ de $\mathcal{A}$ vérifiant (3) ou (3′) pour $\varepsilon = d$, d rendant $z^2 + z + d$ irréductible dans C_π (*E.*, 45) est le *second groupe hypoabélien* d'ordre $\frac{2\Pi_1^\nu(\pi^{2i}-1)\pi^{2i}}{\pi^{2\nu}(\pi^\nu-1)}$ (*Ibid.*). Pour $p > 2$, le diviseur de $\mathcal{A}$ qui vérifie (2) ou (2′) sera désigné par $\mathcal{K}(2\nu, \pi)$.

8. Revenons maintenant au groupe G du n° 6. On voit comme au n° 1 que G divise l'holomorphe K de A. Supposons que la substitution (4) corresponde à l'élément j du n° 6. Cette substitution appartient alors, pour $p > 2$, à $\mathcal{A}(2\nu, p)$ ou à $\mathcal{K}(2\nu, p)$, pour $p = 2$, à $\mathfrak{H}_0(2\nu, p)$ ou à $\mathfrak{H}_1(2\nu, p)$. Par hypothèse la fonction caractéristique $\varphi(z)$ de s est irréductible. Donc, si $p > 2$, il faut $\varepsilon = 0$, sans quoi, d'après (2), $\varphi(z)$ aurait le facteur $1 - z$; nous retrouverons d'ailleurs ce résultat tout à l'heure. Il faudra en outre que q^n soit diviseur propre de $p^{2\nu} - 1$, en sorte que q^n divise $p^\nu + 1$. Donc, si $p = 2$ et $\nu = 1$, $q^n = 3$ divise l'ordre de $\mathfrak{H}_1$ et non celui de $\mathfrak{H}_0$, c'est-à-dire que s est dans $\mathfrak{H}_1$ et que $\varepsilon = \eta = 1$.

G | D n'ayant qu'un type déjà trouvé (2), on pourra, par un changement de générateurs, ramener les équations de G à la forme

$$a^p = jq^n = 1, \quad c_i^p = a^{\gamma_i}, \quad d_i^p = a^{\delta_i}, \quad c_i^{-1} a c_i = d_i^{-1} a d_i = a,$$
$$c_i c_h = c_h c_i, \quad d_i d_h = d_h d_i, \quad c_i d_h = d_h c_i, \quad c_i^{-1} d_i c_i = d_i a, \quad j^{-1} a j = a^{\xi}$$
$$(i, h = 1, \ldots, \nu).$$

$$(5) \quad \begin{cases} j^{-1} c_\sigma j = a^{\lambda_\sigma} c_{\sigma+1}, & j^{-1} d_\sigma j = a^{\lambda_{\nu+\sigma}} d_{\sigma+1}, \\ j^{-1} c_\nu j = a^{\lambda_\nu} d_1, & j^{-1} d_\nu j = a^{\lambda_{2\nu}} c_1^{\alpha_0} \ldots c_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}} d_1^{\alpha_\nu} \ldots d_{\nu-1}^{\alpha_{2\nu-1}} \end{cases} \quad (\sigma = 1, \ldots, \nu - 1),$$

$\theta^{2\nu} - \Sigma_0^{2\nu-1} \alpha_i \theta^i = f(\theta)$ étant irréductible dans C_p et appartenant à l'exposant q^n. Les conditions (1) donnent $\xi = 1$, $\alpha_0 = 1$ (si $\nu = 1$, elles donnent seulement $\xi = -\alpha_0$; mais alors $-\alpha_0 = \theta^{1+p}$ et q^n divise $1 + p$) et, si $\nu > 1$, $\alpha_{\nu+1} = \ldots = \alpha_{2\nu-1} = 0$. Si $p > 1$, ou si $p = 2$ avec $\nu > 1$, les conditions (2) et (3) donnent $\varepsilon = 0$ et, sauf si $\nu = 1$ avec $p > 1$, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{\nu-1} = 0$. Donc s est dans $\mathcal{A}_1$ si $p > 2$ et dans $\mathcal{B}_0$ si $p = 2$ avec $\nu > 1$. Si $p = 2$ avec $\nu = 1$, on a vu que $\varepsilon = 1$ et que s est dans $\mathcal{B}_1$. En prenant $c_i a^{x_i}$ pour c_i et $d_i a^{x_{\nu+i}}$ pour d_i, λ_k est remplacé par $\lambda_k + \xi x_k - x_{k+1}$ $(k = 1, \ldots, 2\nu - 1)$ et $\lambda_{2\nu}$ par $\lambda_{2\nu} + \xi x_{2\nu} - \Sigma_0^{2\nu-1} \alpha_i x_{i+1}$. Les équations obtenues en annulant ces quantités mod p déterminent $x_2, \ldots, x_{2\nu}$ en fonction de x_1, puis x_1 par une équation linéaire où le coefficient de x_1 est $f(\xi) \not\equiv 0$ (f est irréductible). On pourra donc supposer nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2\nu}$. Si $p > 2$, ou si $p = 2$ avec $\nu > 1$, on sait *a priori* (*E.*, 144, 145) que A n'a que des e_p; donc $\gamma_i = \delta_i = 0$. Au contraire, si $p = 2$ avec $\nu = 1$, A a des e_{p^2} en sorte que les γ_i, δ_i ne peuvent pas être tous nuls. D'ailleurs (5) montre que $c_1, \ldots, c_\nu$, $d_1, \ldots, d_\nu$ sont du même ordre; donc $\gamma_i = \delta_i = r$. *Ainsi on n'a qu'un type pour $p \geqq 2$, et ce type n'existe que s'il y a un polynome irréductible de la forme $\theta^{2\nu} - \alpha\theta^\nu - 1$ appartenant à l'exposant q^n mod p (il faut d'abord pour cela que q^n soit diviseur propre de $p^{2\nu} - 1$).*

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE M. PETROVITCH RELATIFS AUX ZÉROS DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

Par M. E. Landau.

I.

Dans un Mémoire qu'a inséré ce *Bulletin* (¹) M. Petrovitch démontre, par une méthode très intéressante, le théorème suivant (²) :

A. *Si l'on désigne par* λ *le plus petit module des zéros de la série*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

(où a_0 est supposé différent de o) *et si l'on forme la fonction*

$$u(z) = \left|\frac{1}{z^2}\right| \sum_0^\infty |a_n z^n|^2,$$

on aura

$$\lambda \geqq \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}} \quad (^3), \tag{2}$$

(¹) *Remarque sur les zeros des séries de Taylor*, t. XXIX, 1901, p. 303-312.

(²) *Ibidem*, voir p. 306.

(³) Je change ici, dans l'énoncé de M. Petrovitch, le signe $>$ en $\geqq$. En réalité, sa démonstration prouve seulement que la série (1) n'a pas de zéro dont le module soit inférieur à $\frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}$. Avec le signe $>$ dans l'inégalité (2), le théorème ne serait plus exact, comme l'exemple suivant le fera voir. La série

$$-1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{-1+2z}{1-z}$$

admet, dans son cercle de convergence (de rayon 1), la seule racine $\frac{1}{2}$. Donc $\lambda = \frac{1}{2}$. Or, pour $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$\frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}} = \frac{1}{\sqrt{2\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = \lambda.$$

quelle que soit la valeur de la variable complexe z à l'intérieur du cercle de convergence de la série (1).

En d'autres termes, si R est le rayon de convergence de la série (1) et r une quantité positive inférieure à R, on a

$$\lambda \geqq \frac{|a_0| r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}}. \tag{3}$$

Si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

est une fonction entière, l'inégalité (3) s'applique à toutes les valeurs positives de r.

M. Petrovitch a déduit de son théorème A, vers la fin de son Mémoire, une autre proposition. Il se sert de l'inégalité

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < \left(\sum_0^{\infty} |a_n| r^n\right)^2,$$

dont le second membre représente le carré de la fonction majorante $\mathfrak{M}(r)$ relative à $f(z)$ pour la circonférence de rayon r. M. Petrovitch conclut donc de (3) l'inégalité

$$\lambda > \frac{|a_0| r}{\sum_0^{\infty} |a_n| r^n} = \frac{|a_0| r}{\mathfrak{M}(r)}, \tag{4}$$

qu'il énonce sous la forme suivante [1] :

B. *Une fonction $f(z)$, holomorphe dans une circonférence* C *décrite autour de l'origine comme centre, ne s'annulant pas à l'origine, ne saurait avoir de zéro de module inférieur à l'expression*

$$\frac{|f(0)|}{\mathrm{M}},$$

où M *désigne la plus petite* [2] *valeur que prend le module du*

---

[1] *Idem, voir* p. 311-312.

[2] Je corrige ici une faute d'écriture, en remplaçant, dans l'énoncé de M. Petrovitch, le mot *grande* par *petite*.

rapport de la fonction majorante de $f(z)$ à la variable z pour les valeurs de z comprises à l'intérieur de la circonférence C.

II.

Je ferai observer en premier lieu que ce théorème B doit être considéré comme presque évident; en effet, en vertu de l'inégalité

$$\frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n} < 1,$$

pour

$$|z| \leqq \frac{|a_0|r}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n}, \qquad m \geqq 1,$$

on a aussi

$$|z|^m \leqq \left(\frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n}\right)^m r^m \leqq \frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n} r^m;$$

d'où

$$|f(z)-a_0| = |a_1 z + a_2 z^2 + \ldots| \leqq \sum_{m=1}^{\infty}|a_m||z|^m$$

$$\leqq \frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n}\sum_{m=1}^{\infty}|a_m|r^m < |a_0|,$$

$$|f(z)| = |a_0 + \{f(z)-a_0\}| \geqq |a_0| - |f(z)-a_0| > 0.$$

III.

On peut obtenir une proposition plus instructive que B en interprétant l'inégalité (3) de M. Petrovitch de la manière suivante.

Les formules connues de la théorie des séries de Fourier, si on

les applique au carré du module de

$$f(z) = f(re^{\varphi i}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n r^n \cos n\varphi - \gamma_n r^n \sin n\varphi) + i \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n r^n \sin n\varphi + \gamma_n r^n \cos n\varphi)$$

(où l'on a posé $a_n = \beta_n + \gamma_n i$), donnent

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n^2 r^{2n} + \gamma_n^2 r^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

où, dans l'intégrale, z parcourt la circonférence $re^{\varphi i}$. Cette identité (5), connue, quoique pas très usuelle, montre qu'en désignant par $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, on a

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqq \{M(r)\}^2 \quad (^1).$$

De (3) et (6), on conclut l'inégalité

$$(7) \qquad \lambda \geqq \frac{|a_0| r}{M(r)} \quad (^2).$$

Si la fonction $|f(z)|$ n'est pas constante pour $|z| = r$, on a même

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < \{M(r)\}^2,$$

$$\lambda > \frac{|a_0| r}{M(r)},$$

---

(1) L'inégalité (6) a été démontrée, sans faire intervenir les intégrales, par M. Gutzmer dans sa Note : *Ein Satz über Potenzreihen* (*Mathematische Annalen*, t. XXXII, 1888, p. 596-600). Ce fait intéressant que $\{M(r)\}^2$ est supérieur ou égal non seulement à chacune des quantités $|a_n|^2 r^{2n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), ainsi que Cauchy l'avait démontré, mais aussi à leur somme, n'est mentionné presque dans aucun traité.

(2) Dans l'exemple contenu dans la troisième note de la page 251, la limite indiquée par le second membre de (7) est atteinte. Car on a $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$. D'ailleurs, pour $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a, indépendamment de φ, $|f(z)| = \left|\frac{-1+2z}{1-z}\right| = \sqrt{2}$.

ce qui, en vertu de la relation

$$M(r) \leqq \mathfrak{M}(r),$$

entraîne l'inégalité

$$\lambda > \frac{|a_0| r}{\mathfrak{M}(r)}. \tag{4}$$

Si $|f(z)|$ est constant pour $|z| = r$, on a certainement

$$M(r) < \mathfrak{M}(r),$$

de sorte que (7) entraîne l'inégalité (4).

IV.

Cependant l'inégalité (7) n'est pas nouvelle; au contraire, elle est une conséquence presque immédiate du théorème de M. Jensen [1], dont voici l'énoncé dans le cas des fonctions $f(z)$ régulières pour $|z| \leqq r$ et différentes de o pour $z = o$:

Si $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sont les zéros de la fonction dont le module ne surpasse pas r, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z)|\, d\varphi = \log\left|\frac{f(o) r^k}{z_1 z_2 \ldots z_k}\right|, \tag{8}$$

où z parcourt la circonférence $re^{\varphi i}$.

Il résulte de (8) que

$$\log\left|\frac{f(o) r^k}{z_1 z_2 \ldots z_k}\right| \leqq \log M(r),$$

$$\left|\frac{f(o) r^k}{z_1 z_2 \ldots z_k}\right| \leqq M(r). \tag{9}$$

Donc, pour $|z_1| \leqq r < |z_2|$, en posant $k = 1$, $|z_1| = \lambda$, on a

$$\frac{|a_0| r}{\lambda} \leqq M(r),$$

$$\lambda \geqq \frac{|a_0| r}{M(r)}.$$

---

[1] *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions* (*Acta mathematica*, t. XXII, 1899, p. 359-364).

C'est l'inégalité (7), pour $|z_1| \leqq r < |z_2|$. Pour $k = 0$, c'est-à-dire pour $0 < r < |z_1|$, elle résulte de ce que

$$M(r) > |a_0|,$$

$$\lambda = |z_1| > r > \frac{|a_0|}{M(r)} r.$$

Pour $k \geqq 2$, c'est-à-dire pour $|z_2| \leqq r$ et r inférieur au rayon du cercle de convergence de la série (1), elle résulte de

$$M(r) \geqq \left| \frac{f(0) r^k}{z_1 \ldots z_k} \right| = \frac{|a_0| r}{\lambda} \cdot \frac{r}{|z_2|} \cdots \frac{r}{|z_k|} \geqq \frac{|a_0| r}{\lambda} \cdot 1 \ldots 1 = \frac{|a_0| r}{\lambda}.$$

De cette façon, M. Lindelöf [1] est même arrivé à déduire du théorème de M. Jensen, pour tous les ν, l'inégalité

$$M(r) \geqq \frac{|a_0| r^\nu}{|z_1| \ldots |z_\nu|}, \tag{10}$$

où les racines $z_1, z_2, \ldots$ sont rangées par ordre de modules croissants et où r désigne un nombre positif quelconque inférieur au cercle de convergence de (1). Il est vrai que M. Lindelöf ne parle, à l'endroit cité, que des fonctions entières; mais il n'y a rien à changer à son raisonnement pour le cas général. Seulement il faut mettre $\geqq$ à la place de $>$, pour embrasser tous les cas, ce qui est fait dans la formule (10). Voici donc la démonstration de l'inégalité (10) :

Soient $z_1, \ldots, z_k$ les zéros dont la valeur absolue est $\leqq r$.

1° Pour $k = \nu$, c'est-à-dire pour $|z_\nu| \leqq r < |z_{\nu+1}|$, (10) n'est autre chose que (9).

2° Pour $k < \nu$, on a $0 < r < |z_\nu|$, et (10) résulte de (9) en vertu de

$$\frac{|a_0| r^\nu}{|z_1| \ldots |z_\nu|} = \frac{|a_0| r^k}{|z_1| \ldots |z_k|} \cdot \frac{r}{|z_{k+1}|} \cdots \frac{r}{|z_\nu|} \leqq \frac{|a_0| r^k}{|z_1| \ldots |z_k|} \cdot 1 \ldots 1 = \frac{|a_0| r^k}{|z_1| \ldots |z_k|}.$$

3° Pour $k > \nu$, on a $r \geqq |z_{\nu+1}|$; (10) est alors la conséquence

---

[1] *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, 1902, p. 13-14).

de (9) et de

$$\frac{|a_0|r^k}{|z_1|\ldots|z_k|}$$
$$= \frac{|a_0|r^\nu}{|z_1|\ldots|z_\nu|}\cdot\frac{r}{|z_{\nu+1}|}\cdots\frac{r}{|z_k|} \geqq \frac{|a_0|r^\nu}{|z_1|\ldots|z_\nu|}\cdot 1\ldots 1 = \frac{|a_0|r^\nu}{|z_1|\ldots|z_\nu|}.$$

V.

Je vais maintenant montrer que non seulement l'inégalité (7), tirée du théorème A, peut être déduite du théorème de M. Jensen, mais que le théorème A lui-même est contenu dans le théorème de M. Jensen.

En appliquant l'identité (5), on voit qu'il s'agit de démontrer l'inégalité

$$(11)\qquad \lambda \geqq \frac{|a_0|r}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|^2\,d\varphi}},$$

en partant du théorème de M. Jensen.

Celui-ci peut s'écrire

$$\frac{|a_0|r^k}{|z_1|\ldots|z_k|} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\varphi}.$$

Le premier membre étant, comme on l'a vu, toujours supérieur ou égal à $\frac{|a_0|r}{\lambda}$, on a

$$(12)\qquad \frac{|a_0|r}{\lambda} \leqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\varphi}.$$

Soit $g(\varphi)$ une fonction de φ, continue pour $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. La moyenne géométrique de n nombres positifs étant inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique, on a

$$\sqrt[n]{e^{g(0)}e^{g\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\ldots e^{g\left\{(n-1)\frac{2\pi}{n}\right\}}}$$
$$= e^{\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} g\left(\nu\frac{2\pi}{n}\right)} \leqq \frac{1}{n}\left\{e^{g(0)} + e^{g\left(\frac{2\pi}{n}\right)} + \ldots + e^{g\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}\right\} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{g\left(\nu\frac{2\pi}{n}\right)},$$

d'où, en passant à la limite,

$$(13) \qquad e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,d\varphi} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{g(\varphi)}\,d\varphi.$$

Supposons d'abord que $f(z)$ n'ait pas de zéros sur la circonférence $|z| = r$, et posons, dans (13),

$$g(\varphi) = 2\log|f(re^{\varphi i})| = \log\{|f(re^{\varphi i})|^2\};$$

nous aurons

$$(14) \qquad \left(e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z)|\,d\varphi}\right)^2 \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\,d\varphi;$$

donc, en vertu de (12),

$$(15) \qquad \frac{|a_0|r}{\lambda} \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\,d\varphi}.$$

Les deux membres de (15) étant des fonctions continues de r, cette inégalité subsiste aussi dans le cas où $f(z)$ a des zéros dont le module est égal à r.

Donc on a

$$(11) \qquad \lambda \geqq \frac{|a_0|r}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\,d\varphi}},$$

ce qui constitue, comme nous l'avons vu plus haut, le théorème A de M. Petrovitch.

VI.

Soient, plus généralement, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ les modules des ν premiers zéros de la fonction $f(z)$, situés dans le cercle de convergence de la série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

On a vu, au paragraphe IV, que, pour tout r inférieur au rayon de ce cercle, on a

$$\frac{|a_0|r^\nu}{\lambda_1\ldots\lambda_\nu} \leqq \frac{|a_0|r^k}{|z_1\ldots z_k|},$$

où $z_1, \ldots, z_k$ désignent les zéros dont le module ne surpasse pas r. Donc, par le théorème de M. Jensen,

$$\frac{|a_0| r^\nu}{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} \leqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |f(z)| d\varphi},$$

et, en appliquant (14),

$$\frac{|a_0| r^\nu}{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 d\varphi},$$

ce qui, en vertu de (5), peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu \geqq \frac{|a_0| r^\nu}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}}.$$

Pour $\nu = 1$, on retrouve le théorème de M. Petrovitch.

VII.

Enfin, j'indiquerai une démonstration directe et très élémentaire du théorème A. L'inégalité en question

$$(3) \qquad \lambda \geqq \frac{|a_0| r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}}$$

sera évidemment démontrée si l'on réussit à prouver que

$$(16) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \frac{|a_0|^m r^m}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac{m}{2}}} \leqq |a_0|;$$

car, pour

$$|z| < \frac{|a_0| r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}},$$

on aura alors

$$|f(z)-a_0|$$
$$=\left|\sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m\right| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|\,|z|^m < \sum_{m=1} |a_m| \frac{|a_0|^m r^m}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac{m}{2}}} \leqq |a_0|.$$

$$f(z) \neq 0.$$

En d'autres termes, si l'on pose dans (16), pour $m = 1, 2, \ldots,$

$$\frac{|a_m|\, r^m}{|a_0|} = p_m,$$

il suffit de prouver : si $p_1, p_2, \ldots$ sont des quantités réelles et si la série

$$1 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots$$

converge, on a

$$(17) \qquad S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{(1 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots)^{\frac{m}{2}}} \leqq 1.$$

Cette inégalité (17) peut être déduite d'une inégalité plus générale établie par M. Pringsheim [1] dans un autre but. Elle s'établit directement de la manière suivante, en excluant le cas banal de $p_1 = p_2 = \ldots = 0$, où $S = 0 < 1$.

On a, pour α et β réels,

$$2\alpha\beta \leqq \alpha^2 + \beta^2.$$

Appliquons cette identité à

$$\alpha = \frac{p_m}{(p_1^2 + p_2^2 + \ldots)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \beta = \frac{(p_1^2 + p_2^2 + \ldots)^{\frac{1}{2}}}{(1 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots)^{\frac{m}{2}}},$$

où m désigne un des nombres $1, 2, \ldots$; nous aurons

$$(18) \qquad \frac{2p_m}{(1 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots)^{\frac{m}{2}}} \leqq \frac{p_m^2}{p_1^2 + p_2^2 + \ldots} + \frac{p_1^2 + p_2^2 + \ldots}{(1 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots)^m}.$$

---

[1] *Voir*, par exemple, *Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung* [*Mathematische Annalen*, t. LVIII, 1904, p. 268, formule (*b*), en lisant, entre les deux membres, $\leqq$ au lieu de $<$].

Ajoutons ces inégalités (18) pour $m = 1, 2, \ldots$; nous obtiendrons

$$2S \leqq \frac{p_1^2 + p_2^2 + \ldots}{p_1^2 + p_2^2 + \ldots} + \frac{p_1^2 + p_2^2 + \ldots}{p_1^2 + p_2^2 + \ldots} = 1 + 1 = 2,$$

$$S \leqq 1;$$

c'est l'inégalité (17) qu'il fallait démontrer, ou, en d'autres termes, le théorème A de M. Petrovitch.

CORRESPONDANCE.

CINQ LETTRES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES.

I. — *Lettre de M. Hadamard à M. Borel.*

J'ai lu avec intérêt les arguments que tu opposes (2e Cahier du tome LX des *Mathematische Annalen*) à la démonstration de M. Zermelo parue dans le Tome précédent. Je ne partage cependant pas ton opinion à ce sujet. Je n'admets pas, tout d'abord, l'assimilation que tu établis entre le fait qui sert de point de départ à M. Zermelo et le raisonnement qui consisterait à numéroter les éléments de l'ensemble les uns après les autres, ce numérotage étant poursuivi *transfiniment*. Il y a, en effet, une différence fondamentale entre les deux cas : le raisonnement qui vient d'être cité en dernier lieu comporte une série de choix successifs *dont chacun dépend des précédents;* c'est pour cela que son application transfinie est inadmissible. Je ne vois aucune analogie à établir, au point de vue qui nous occupe, entre les choix en question et ceux dont parle M. Zermelo, lesquels sont *indépendants les uns des autres*.

C'est d'ailleurs dans le cas d'une infinité *non dénombrable* de choix que tu récuses cette manière d'opérer; mais, à mon tour, je ne vois pas de différence, à cet égard, entre le cas d'une infinité non dénombrable et celui d'une infinité dénombrable. La diffé-

rence serait manifeste s'il y avait une dépendance quelconque entre les choix en question, parce qu'il faudrait alors avoir égard à l'ordre dans lequel on les opérerait : elle me paraît, encore une fois, s'évanouir complètement dans le cas des choix indépendants.

Ce qui est certain, c'est que M. Zermelo ne donne aucun moyen d'exécuter *effectivement* l'opération dont il parle, et qu'il reste douteux que personne puisse, dans la suite, indiquer ce moyen. Il aurait été assurément plus intéressant de résoudre le problème sous cette forme; mais la question ainsi posée (détermination effective de la correspondance cherchée) n'en est pas moins complètement distincte de celle que nous examinons (une telle correspondance existe-t-elle?) : il y a entre elles toute la différence, laquelle est fondamentale, qui existe entre ce que M. Tannery [1] appelle *une correspondance* qui peut être *définie* et une correspondance qui peut être *décrite*. Plusieurs questions importantes de Mathématiques changeraient totalement de sens, et de solutions, si l'on substituait le second mot au premier. Tu emploies des correspondances dont tu constates l'*existence* sans pouvoir cependant les *décrire*, dans ton important raisonnement relatif aux séries qui admettent leur cercle de convergence comme coupure : si l'on se bornait aux séries entières dont la loi de formation peut être décrite, l'opinion ancienne (à savoir, que les séries entières admettant leur cercle de convergence comme coupure sont l'exception) devrait, à mon sens, être considérée comme la vraie. C'est d'ailleurs une pure question de sentiment; car la notion de correspondance « qui peut être décrite » est, pour reprendre ton expression, « en dehors des Mathématiques »; elle relève du domaine de la psychologie et est relative à une propriété de notre esprit, c'est une question de cette nature que celle de savoir si la correspondance employée par M. Zermelo pourra jamais être indiquée *en fait*.

Quant à l'existence de cette correspondance, elle me paraît aussi adéquate à la possibilité de prendre *un* élément dans un ensemble quelconque donné, que la proposition suivante :

A. *Un nombre x étant donné, il existe des nombres y qui ne*

---

[1] *Revue générale des Sciences*, t. VIII, 1897, p. 133 et suiv.

sont liés à x par aucune équation algébrique à coefficients entiers,

l'est à celle-ci :

B. *Il existe des fonctions y de x telles que, pour aucune valeur de x, y n'ait ni une valeur algébrique, ni une valeur liée à x par une équation algébrique à coefficients entiers.*

On pourrait d'ailleurs, sans doute, former de telles fonctions. Mais ce que je prétends, c'est que cela n'est nullement nécessaire pour affirmer l'exactitude du théorème B; et je crois que beaucoup de mathématiciens ne prendraient pas plus que moi cette peine s'ils avaient à employer le théorème en question. — J. Hadamard.

II. — *Lettre de M. Baire à M. Hadamard.*

Borel me communique la lettre où vous lui exposez votre manière de voir sur le grand débat soulevé par la Note Zermelo. Je vous demande la permission de vous adresser quelques réflexions qu'elle me suggère.

Je suis, vous le savez, de l'avis de Borel, en gros, et si je m'en écarte, ce sera pour aller plus loin que lui.

Supposons qu'on fasse un effort pour essayer d'appliquer la méthode de Zermelo à l'ensemble M des suites d'entiers positifs. On prend dans M un élément distingué m_1; reste l'ensemble $M - m_1$, dans lequel on prend un élément distingué m_2; etc. Ces choix successifs dépendent bien chacun de ceux qui le précèdent. Mais, dites-vous avec M. Zermelo, les choix sont indépendants les uns des autres, parce qu'il admet comme point de départ *un choix d'élément distingué fait dans* TOUTE *partie de* M. Ceci ne me paraît pas satisfaisant : c'est, pour moi, dissimuler la difficulté *en la noyant dans une difficulté plus grande.*

L'expression *ensemble donné* est employée à chaque instant : a-t-elle un sens? Pas toujours, selon moi. Dès qu'on parle d'infini (même dénombrable, et c'est ici que je suis tenté d'être plus radical que Borel), l'assimilation, *consciente ou inconsciente,* avec un sac de billes qu'on donne de la main à la main, doit complètement disparaître, et nous sommes, à mon avis, dans le *virtuel,*

c'est-à-dire que nous faisons des conventions qui nous permettent ultérieurement, un objet étant défini *par une nouvelle convention,* d'affirmer certaines propriétés de cet objet. Mais croire qu'on est allé plus loin ne me paraît pas légitime. En particulier, de ce qu'un ensemble est donné (nous serons d'accord pour dire, par exemple, que nous nous donnons l'ensemble des suites d'entiers positifs), *il est faux pour moi de considérer les parties de cet ensemble comme données.* A plus forte raison je refuse d'attacher un sens au fait de concevoir un choix fait dans chaque partie d'un ensemble.

M. Zermelo dit : « Concevons qu'à tout ensemble partiel de M corresponde un de ses éléments. » C'est là une conception qui n'a rien de contradictoire, d'accord. Aussi, tout ce qu'il démontre pour moi, c'est que nous n'apercevons pas de contradiction à concevoir que, dans tout ensemble qu'on nous définira, les éléments aient entre eux des relations de position identiques à celles qu'ont les éléments des ensembles bien ordonnés. Pour dire après cela qu'on a établi que tout ensemble peut être mis sous la forme d'un ensemble bien ordonné, il faut donner aux mots une extension extraordinaire et, j'ajouterai, trompeuse.

Dans ce qui précède, je ne suis arrivé que bien incomplètement à rendre ma pensée. J'ai dit ma manière de voir dans la phrase qu'a bien voulu transcrire Borel dans sa Note. Pour moi, le progrès, dans cet ordre d'idées, consisterait à délimiter le domaine de ce qui est définissable. Et, en fin de compte, en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini. — R. Baire.

III. — *Lettre de M. Lebesgue à M. Borel.*

Vous me demandez mon opinion sur la Note de M. Zermelo (*Math. Annalen,* t. LIX) sur les objections que vous lui avez faites (*Math. Annalen,* t. LX) et sur la lettre de M. Hadamard que vous me communiquez; la voici. Excusez moi d'être long, j'ai essayé d'être clair.

Tout d'abord je suis d'accord avec vous pour ceci : M. Zermelo a très ingénieusement démontré que l'on savait résoudre le problème A :

A. *Mettre un ensemble* M *sous forme bien ordonnée,*

toutes les fois qu'on savait résoudre le problème B :

B. *Faire correspondre à chaque ensemble* M' *formé avec des éléments de* M *un élément particulier* m' *de* M'.

Malheureusement le problème B n'est facile à résoudre, à ce qu'il semble, que pour les ensembles qu'on sait bien ordonner; par suite on n'a pas une solution générale du problème A.

Je doute fort qu'on puisse donner une solution générale de ce problème, du moins si l'on admet, avec M. Cantor, que définir un ensemble M c'est nommer une propriété P appartenant à certains éléments d'un ensemble N précédemment défini et caractérisant, par définition, les éléments de M. En effet, avec cette définition, on ne sait rien sur les éléments de M d'autre que ceci : ils possèdent tous les propriétés *inconnues* des éléments de N et ce sont les seuls qui ont la propriété P *inconnue*. Rien là-dedans ne permet de distinguer deux éléments de M, encore moins de les classer comme il faudrait le faire pour résoudre A.

Cette objection, faite *a priori* à tout essai de solution de A, tombe évidemment si l'on particularise N ou P; l'objection tombe, par exemple, si N est l'ensemble des nombres. Tout ce que l'on peut espérer faire de général, c'est indiquer des problèmes, tels que B, dont la résolution entraînerait celle de A et possibles dans certains cas, particuliers, mais qui se rencontrent fréquemment. D'où l'intérêt, à mon avis, du raisonnement de M. Zermelo.

Je crois que M. Hadamard est plus fidèle que vous à la pensée de M. Zermelo en interprétant la Note de cet auteur comme un essai, non pas de résolution effective de A, mais de démonstration d'existence de la solution. La question revient à celle-ci, peu nouvelle : *peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir?*

C'est évidemment une affaire de convention; mais je crois qu'on ne peut bâtir solidement qu'*en admettant qu'on ne démontre l'existence d'un être qu'en le définissant*. A ce point de vue, voisin de celui de Kronecker et de M. Drach, il n'y a pas à distinguer entre A et le problème C :

C. *Tout ensemble peut-il être bien ordonné?*

Je n'aurais rien de plus à dire si la convention que j'ai indiquée était universellement admise; mais je dois avouer que l'on emploie souvent, et que j'ai moi-même souvent employé, le mot *existence* dans d'autres sens. Par exemple, lorsqu'on interprète un raisonnement bien connu de M. Cantor en disant : *il existe une infinité non dénombrable de nombres,* on ne donne cependant pas le moyen de nommer une telle infinité. On montre seulement, vous l'avez dit avant moi, que, chaque fois qu'on aura une infinité dénombrable de nombres, on pourra définir un nombre ne faisant pas partie de cette infinité. (Le mot *définir* a tout le temps le sens de : *nommer une propriété caractéristique du défini*). Une existence de cette nature peut être utilisée dans un raisonnement et de la manière suivante : une propriété est vraie, si, la nier, conduit à admettre qu'on peut ranger tous les nombres en suite dénombrable. Je crois qu'elle ne peut intervenir que de cette manière.

M. Zermelo utilise l'*existence* d'une *correspondance* entre les sous-ensembles de M et certains de leurs éléments. Vous voyez que, quand même l'existence de ces correspondances serait hors de doute, suivant la manière dont cette existence aurait été prouvée, il ne serait pas évident qu'on ait le droit d'utiliser cette existence comme le fait M. Zermelo.

J'arrive au raisonnement que vous énoncez ainsi : « Il est possible, dans un ensemble particulier M′, de choisir *ad libitum* l'élément distingué m'; ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M′, peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », et duquel semble résulter l'existence des correspondances.

Tout d'abord, M′ étant donné, est-il évident qu'on puisse choisir m'? Cela serait évident si M′ existait, au sens presque kroneckérien que j'ai dit, puisque dire que M′ existe serait alors affirmer que l'on sait nommer certains de ses éléments. Mais étendons le sens du mot *exister*. L'ensemble Γ des correspondances entre les sous-ensembles M′ et les éléments distingués m' *existe* certainement pour MM. Hadamard et Zermelo; ce dernier représente même le nombre de ses éléments par un produit transfini. Cependant, sait-on choisir un élément de Γ? Non, évidemment, puisque ce serait donner de B, pour M, une solution déterminée.

Il est vrai que j'emploie le mot *choisir* dans le sens de *nommer* et qu'il suffit peut-être pour le raisonnement de M. Zermelo que

choisir signifie *penser à*. Mais il faut cependant remarquer qu'on n'indique pas celui auquel on pense et qu'il est néanmoins nécessaire au raisonnement de M. Zermelo qu'on pense à *une correspondance déterminée toujours la même*. M. Hadamard croit, il me semble, qu'il n'est pas nécessaire qu'on démontre qu'on peut *déterminer* un élément (et un seul); c'est de là, à mon avis, que viennent les différences d'appréciation.

Pour mieux vous faire sentir la difficulté que je vois, je vous rappelle que, dans ma thèse, j'ai démontré l'existence (sens non kroneckérien et peut-être difficile à préciser) d'ensembles mesurables non mesurables B, mais il restait douteux pour moi qu'on pût jamais en nommer un. Dans ces conditions, aurais-je eu le droit de fonder un raisonnement sur cette hypothèse : *je suppose choisi un ensemble mesurable non mesurable* B, alors que je doutais que personne pût jamais en nommer un?

Ainsi je vois déjà une difficulté dans ceci « dans un M′ déterminé je puis choisir un m' déterminé », puisqu'il existe des ensembles (l'ensemble C par exemple, qu'on pourrait considérer comme un ensemble M′ provenant d'un ensemble plus général) dans lesquels il est peut-être impossible de choisir un élément. Il y a ensuite la difficulté que vous signalez relative à l'infinité des choix, ce qui fait que, si l'on veut considérer le raisonnement de M. Zermelo comme tout à fait général, il faut admettre qu'on parle d'une infinité de choix, infinité de puissance peut-être très grande; on ne donne d'ailleurs ni la loi de cette infinité, ni la loi d'un des choix; on ne sait pas s'il est possible de nommer une loi définissant un ensemble de choix ayant la puissance de l'ensemble des M′; on ne sait pas s'il est possible, étant donné un M′, de nommer un m'.

En résumé, quand j'examine de près le raisonnement de M. Zermelo, comme d'ailleurs plusieurs raisonnements généraux sur les ensembles, je le trouve trop peu kroneckérien pour lui attribuer un sens (en tant que théorème d'existence de la solution de C, seulement, bien entendu).

Vous faites allusion à ce raisonnement : « Pour bien ordonner un ensemble il suffit d'y choisir un élément, puis un autre, etc. » Il est certain que ce raisonnement présente des difficultés énormes, plus grandes encore, au moins en apparence, que celui de M. Zermelo; et je suis tenté de croire avec M. Hadamard qu'il y a progrès

à avoir remplacé une infinité de choix successifs et dépendant les uns des autres par une infinité, non ordonnée, de choix indépendants. Il n'y a peut-être là qu'une illusion et la simplification apparente tient peut-être seulement à ce que l'on doit remplacer une infinité ordonnée de choix par une infinité non ordonnée, mais de puissance plus grande. De sorte que le fait qu'on peut ramener à la seule difficulté, placée au début du raisonnement de M. Zermelo, toutes les difficultés du raisonnement simpliste que vous citez prouve peut-être simplement que cette seule difficulté est très grande. En tout cas, elle ne me paraît pas disparaître parce qu'il s'agit d'un ensemble non ordonné de choix indépendants. Par exemple, si je crois à l'existence de fonctions $y(x)$ telles que, quel que soit x, y ne soit jamais lié à x par une équation algébrique à coefficients entiers, c'est parce que je crois, avec M. Hadamard, qu'il est possible d'en construire; mais ce n'est pas, pour moi, la conséquence immédiate de l'existence, quel que soit x, de nombres y qui ne soient liés à x par aucune équation à coefficients entiers [1].

Je suis pleinement d'accord avec M. Hadamard quand il déclare que la difficulté qu'il y a à parler d'une infinité de choix sans en donner la loi est aussi grave, qu'il s'agisse ou non d'une infinité dénombrable. Quand on dit, comme dans le raisonnement que vous critiquiez, « ce choix pouvant être fait pour chacun des ensembles M′, peut être fait pour l'ensemble de ces ensembles », on ne dit rien si l'on n'explique pas les termes employés. Faire un choix, ce peut être écrire ou nommer l'élément choisi; faire une infinité de choix, ce ne peut être écrire ou nommer les éléments choisis, un à un : la vie est trop courte. Il faut donc dire ce que c'est faire. On entend par là, en général, que c'est donner la loi qui définit les éléments choisis, mais cette loi est pour moi, comme pour M. Hadamard, aussi indispensable, qu'il s'agisse d'une infinité dénombrable ou non.

Peut-être cependant suis-je encore d'accord avec vous sur ce point parce que, si je n'établis pas de différences théoriques entre

---

[1] En corrigeant les épreuves, j'ajoute qu'en fait le raisonnement, par lequel on légitime ordinairement l'énoncé A de M. Hadamard (p. 262), légitime en même temps l'énoncé B. Et, à mon avis, c'est parce qu'il légitime B qu'il légitime A.

les deux infinités, au point de vue pratique, je fais une grande différence entre elles. Quand j'entends parler d'une loi définissant une infinité transfinie de choix, je suis très méfiant, parce que je n'ai jamais encore vu de pareilles lois, tandis que je connais des lois définissant une infinité dénombrable de choix. Mais ce n'est qu'une affaire de routine et, à la réflexion, je vois parfois des difficultés aussi graves, à mon avis, dans des raisonnements où n'interviennent qu'une infinité dénombrable de choix que dans des raisonnements où il y en a une transfinité. Par exemple, si je ne considère pas comme établi par le raisonnement classique que tout ensemble de puissance supérieure au dénombrable contient un ensemble dont la puissance est celle de l'ensemble des nombres transfinis de la classe II de M. Cantor, je n'attribue pas plus de valeur à la méthode par laquelle on démontre qu'un ensemble non fini contient un ensemble dénombrable. Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini, ni infini, l'impossibilité d'un tel ensemble ne me paraît pas démontrée. Mais je vous ai déjà parlé de ces questions. — H. Lebesgue.

IV. — *Lettre de M. Hadamard à M. Borel.*

La question me paraît tout à fait claire maintenant, après la lettre de M. Lebesgue. De plus en plus nettement, elle tient tout entière dans la distinction, exposée dans l'article de M. Tannery, entre ce qui est *déterminé* et ce qui peut être *décrit*.

Lebesgue, Baire et toi, adoptez à cet égard la manière de voir de Kronecker, que je croyais jusqu'ici lui être particulière. Vous répondez négativement à la question posée (ci-dessus, p. 263) par M. Lebesgue : Peut-on démontrer l'existence d'un être mathématique sans le définir? J'y réponds affirmativement. Je prends pour mienne, autrement dit, la réponse que Lebesgue fait lui-même (p. 266) à son objection relative à l'ensemble Γ.

Qu'il *nous* soit impossible, au moins actuellement, de *nommer* un élément de cet ensemble, j'en conviens. C'est là la question pour vous; ce ne l'est pas pour moi.

Il n'y a qu'un point sur lequel il me semble que Lebesgue ne soit pas logique avec lui-même. C'est lorsqu'il se reconnaît ou ne

se reconnaît pas le droit d'utiliser une existence, suivant la manière dont elle a été démontrée. Pour moi, les *existences* dont il parle sont des faits comme les autres. Sinon, elles n'ont pas lieu.

La question se pose de même vis-à-vis de Baire. Je n'aimerais pas beaucoup la placer, comme il le fait (p. 264), à la façon de M. Hilbert, sur le terrain du *non contradictoire,* qui me paraît encore relever de la psychologie et faire entrer en ligne de compte les propriétés de nos cerveaux. Je ne comprends même pas bien comment M. Zermelo peut avoir *démontré* que *nous n'apercevons* pas de contradiction, etc. Cela ne se *démontre* pas, cela se *constate :* on en a aperçu ou l'on n'en a pas aperçu.

Ce point écarté, la question principale, celle de savoir si l'ensemble peut être ordonné, n'a évidemment pas pour Baire (pas plus que pour Lebesgue et toi) le même sens que pour moi. Je dirais plutôt : l'ordination est-elle possible? (et non pas même peut-*on* ordonner, de crainte d'avoir à penser à ce qu'est cet *on*) : Baire dirait : pouvons-*nous* ordonner? Question toute subjective, à mon avis.

Ce sont donc deux conceptions des Mathématiques, deux mentalités qui sont en présence. Je ne vois, dans tout ce qui a été dit jusqu'ici, aucun motif de changer la mienne. Je ne prétends pas l'imposer. Tout au plus ferai-je valoir en sa faveur les arguments que j'ai indiqués dans la *Revue générale des Sciences* (30 mars 1905), savoir :

1° Je crois que le débat est au fond le même qui s'est élevé entre Riemann et ses prédécesseurs, sur la notion même de fonction. La *loi* qu'exige Lebesgue me paraît ressembler fort à l'expression (¹) analytique que réclamaient à toute force les adversaires de Riemann. Et même à une expression analytique pas trop bizarre. Non seulement la *numérabilité* des choix ne me paraît pas changer la question, mais il en est de même de l'*unicité*. Je ne vois pas

(¹) Je crois devoir insister un peu sur ce point de vue qui, s'il faut dire toute ma pensée, me paraît former le fond même du débat. Il me semble que le progrès véritablement essentiel des Mathématiques, à partir de l'invention même du Calcul infinitésimal, a consisté dans l'annexion de notions successives qui, les unes pour les Grecs, les autres pour les géomètres de la Renaissance ou les prédécesseurs de Riemann, étaient « en dehors des Mathématiques », parce qu'il était impossible de les décrire.

comment nous aurions le droit de dire : « Pour chaque valeur de x il existe un nombre satisfaisant à .... Soit y ce nombre... », alors que, parce que « la mariée est trop belle », nous ne pouvons pas dire : « Pour chaque valeur de x il existe une infinité de nombres satisfaisant à .... Soit y l'un de ces nombres ... ».

2° Les choix arbitraires de Tannery conduisent à des nombres ν, que *nous serions* incapables de définir. Je ne conçois pas que ces nombres n'existent pas.

Quant aux raisonnements présentés par M. Bernstein (*Math. Annalen,* t. LX, p. 187), et, par conséquent, à ses objections à la démonstration de M. Zermelo, je ne les considérerais pas, pour ma part, comme probants. Cette opinion est d'ailleurs indépendante de la question que nous discutons actuellement.

M. Bernstein part du paradoxe de M. Burali-Forti (*Circolo matematico di Palermo,* 1897) relatif à l'ensemble W de *tous* les nombres ordinaux. Pour échapper à la contradiction mise en évidence par M. Burali-Forti, il suppose le nombre ordinal W tel qu'il soit impossible de lui ajouter 1. Cette opinion est, pour moi, inadmissible, ainsi que les arguments imaginés en sa faveur par M. Bernstein. L'ordre établi (d'après la théorie de M. Cantor) entre les éléments de W et l'élément supplémentaire (c'est à cet ordre que s'attaque l'auteur) est une pure *convention,* qu'on est toujours libre de faire et à laquelle les propriétés de W, quelles qu'elles soient, ne sauraient mettre aucun obstacle.

La solution est autre. C'est l'existence même de l'ensemble W qui implique contradiction. Dans sa définition, la définition générale du mot *ensemble* est incorrectement appliquée. On n'a le droit de former un ensemble qu'avec des objets préalablement existants et il est aisé de voir que la définition de W suppose le contraire.

Même observation pour *l'ensemble de tous les ensembles* (Hilbert, Congrès de Heidelberg).

Revenons à la question primitive. Voici encore, à cet égard, non un argument, car je crois que nous coucherons éternellement sur nos positions, mais une conséquence de tes principes.

Cantor a considéré l'ensemble de toutes les fonctions qui, dans l'intervalle (0, 1), ne prennent que les valeurs 0, 1. Cet ensemble a,

pour moi, un sens clair et sa puissance est $2^{\aleph}$, comme l'énonce Cantor. De même, l'ensemble de toutes les fonctions de x a pour moi un sens, et je vois clairement que sa puissance est $\aleph^{\aleph}$.

Quel sens tout cela a-t-il pour toi? Il me paraît évident que cela ne peut en avoir aucun. Car à toute fonction tu imposes une condition supplémentaire qui n'a aucun sens mathématique : celle d'être *descriptible* pour *nous*.

Ou plutôt, voici ce que cela signifie : on ne doit considérer, à ton point de vue, que les fonctions définissables en un nombre fini de mots. Mais, à ce compte, les deux ensembles ainsi formés sont *dénombrables,* ainsi que tous les ensembles possibles, d'ailleurs. — J. Hadamard.

V. — *Lettre de M. Borel à M. Hadamard.*

... Je voudrais d'abord te signaler une intéressante remarque faite par M. Lebesgue à la séance de la Société du 4 mai : Comment M. Zermelo peut-il être assuré qu'aux divers points de son raisonnement il parle *du même* choix de l'élément distingué, puisqu'il ne le caractérise par rien *pour lui-même* (il ne s'agit même pas ici d'un contradicteur possible; il s'agit d'être cohérent avec soi-même).

Quant à ta nouvelle objection, voici quelle est ma situation à son égard.

Je n'aime guère écrire des alephs, mais je consens cependant à faire des raisonnements équivalents à ceux dont tu parles, sans me faire guère illusion sur leur valeur intrinsèque, *mais en les regardant comme pouvant guider pour d'autres raisonnements plus sérieux.* Comme exemple pratique, je puis te citer la Note III que j'ai insérée à la fin de mon dernier petit Livre (*Leçons sur les fonctions de variables réelles, etc.,* rédigées par Maurice Fréchet); le raisonnement qui y est employé est manifestement suggéré par le raisonnement de Cantor, que j'ai rapporté dans mes premières *Leçons sur la théorie des fonctions* [1], page 107.

---

[1] Dans les Notes I et II de ce petit Livre, je fais constamment des raisonnements du type de ceux que tu me refuses le droit de faire; je suis d'ailleurs à chaque instant rempli de scrupules et chacune de ces deux Notes se termine par une phrase très restrictive.

La forme que j'adopte dans cette Note III n'est pas encore absolument satisfaisante, comme je l'indique au bas de la dernière page de mon Livre; mais le raisonnement analogue de M. Lebesgue dans son Mémoire paru dans le *Journal de Jordan* (1905) est, je crois, tout à fait irréprochable, en ce sens qu'il conduit à un résultat précis, exprimable au moyen d'un nombre fini de mots; il a cependant son origine dans celui de Cantor.

On peut se demander quelle est la valeur réelle de ces raisonnements que je ne regarde pas comme valables absolument et qui cependant conduisent ultérieurement à des résultats effectifs. Il semble en effet que, s'ils étaient dépourvus de toute valeur, ils ne pourraient conduire à rien, car ce seraient des assemblages de mots vides de sens. Je crois qu'on serait ainsi trop sévère et qu'ils ont une valeur analogue à celle de certaines théories de Physique mathématique, par lesquelles nous ne prétendons pas exprimer la réalité, mais avoir un guide qui nous permette, par analogie, de découvrir des phénomènes nouveaux, qu'il reste ensuite à vérifier. Il y aurait un travail considérable à faire pour savoir quel est le sens réel et précis que l'on peut attribuer à des raisonnements de ce genre; ce travail est inutile ou du moins hors de proportion avec son utilité; les rapports avec le concret de ces raisonnements trop abstraits apparaissent d'eux-mêmes lorsque le besoin s'en fait sentir.

Je serai d'accord avec toi sur le fait qu'il est contradictoire de parler de l'ensemble de tous les ensembles, car, par le raisonnement de la page 107 citée plus haut, on peut former un ensemble de puissance plus grande, mais je crois que cette contradiction tient à ce que l'on introduit des ensembles non définis réellement. — Em. Borel.

SUR LE PROBLÈME DES AIRES;

Par M. H. Lebesgue.

Je m'aperçois que, dans une Note de ce *Bulletin* (t. XXXI, p. 197), où je rectifiais une erreur commise dans ma Thèse, j'ai de nouveau laissé passer une inexactitude.

Au lieu de prendre pour aire de D le nombre

$$m + \theta\, m(A) + (1 - \theta)\, m(B),$$

il faut, en effet, prendre

$$m + \theta\, m(A) + (1 - \theta)\, m(B) + \tfrac{1}{2} m(E),$$

$m(E)$ désignant la mesure superficielle des points du contour de D qui ne font partie ni de A, ni de B.

Faute de ce terme $\frac{1}{2} m(E)$, que j'avais écrit correctement dans ma Thèse, il arriverait parfois que le domaine formé par la réunion de deux domaines, sans points intérieurs communs, n'aurait pas pour aire la somme des aires des domaines composants.

FIN DU TOME XXXIII.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME XXXIII.

(Les lettres et numéros qui précèdent les titres indiquent les classifications du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*)

Pages.

État de la Société mathématique au commencement de 1905 v

Liste des Présidents de la Société depuis sa fondation XIV

Liste des Sociétés scientifiques et des recueils périodiques avec lesquels la Société échange son *Bulletin* XV

Comptes rendus des séances 1, 81, 157, 225

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

[D 2 b] **Andoyer (H.).** — Sur la sommation des séries 36

[J 1 b β] **André (D.).** — Sur les sommes des nombres, pris de quatre en quatre, des combinaisons régulières d'ordre quelconque 159

[Q 2] **Autonne (L.).** — Sur les droites fondamentales dans les collinéations de l'espace à $n-1$ dimensions 172

[A 5 b] **Bernstein (S.).** — Sur l'interpolation 33

[M³ 2 b] **Bioche (Ch.).** — Remarques sur un cas de symétrie dans l'espace 13

[M³ 6 a] **Bioche (Ch.).** — Sur les courbes gauches de 4ᵉ ordre et de 4ᵉ classe 18

[J 1 a α] **Bioche (Ch.).** — Sur les permutations polyédriques ... 88

[J 2 f] **Borel (Ém.).** — Remarques sur certaines questions de probabilité 123

[H 9 f] **Clairin (J.).** — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes 14

[H 7 c] **Clairin (J.).** — Sur certaines transformations des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. 90

[J 4 d] **Cotton (E.).** — Généralisation de la théorie du trièdre mobile 42

[D 1 a] **Denjoy (A.).** — Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles 98

[L¹ 17 d, K 14 g] **Fontené (G.).** — Sur l'extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres de genre *un*. 115

[R 1 d α] **Fouché (M.)** — Sur la déviation des graves et les champs de force 130

Pages.

[H 9 h α] **Goursat (E.).** — Sur le problème de Monge..... 201

[J 3 c] **Hadamard (J.).** — Sur quelques questions de calcul des variations..... 73

[D 6 i β] **Landau (E.).** — Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann..... 229

[D 3 b α] **Landau (E.).** — Sur quelques théorèmes de M. Petrovitch relatifs aux zéros des fonctions analytiques..... 251

[K 7 a] **Lucas (F.).** — Sur la généralisation du rapport anharmonique..... 225

[S 3] **Maillet (Ed.).** — Sur les mouvements d'une nappe souterraine, particulièrement dans les terrains perméables, spongieux et fissurés..... 2

[H 1 a, S 3 a β] **Maillet (Ed.).** — Sur les solutions de certains systèmes d'équations différentielles; application à un système hydraulique de n réservoirs..... 129

[O 6 a α] **Montcheuil (M. de).** — Détermination des surfaces de révolution admettant une surface de révolution donnée pour surface moyenne..... 17

[O 5 n] **Montcheuil (M. de).** — Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$..... 170

[A 3 g] **Montessus (R. de).** — La résolution numérique des équations..... 26

[D 5 d] **Rémoundos (G.).** — Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes..... 191

[J 4 a] **Séguier (J. de).** — Sur certains groupes d'ordre $p^m q^n$. 242

[R 1 d α] **Sparre (M. de).** — Note au sujet des mouvements à la surface de la Terre..... 65

[R 1 d α] **Sparre (M. de).** — Note au sujet de la déviation des graves dans la chute libre..... 146

[R 8 g] **Suchar (P.-J.).** — Sur une transformation réciproque en Mécanique..... 210

[A 4 e] **Weill (M.).** — Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux..... 82

CORRESPONDANCE.

[J 5] **Baire, Borel, Hadamard, Lebesgue.** — Sur la théorie des ensembles..... 261

[O 2 a] **Lebesgue (H.).** — Sur le problème des aires..... 273

Table des matières du Tome XXXIII..... 275

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME XXXIII.

36349 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

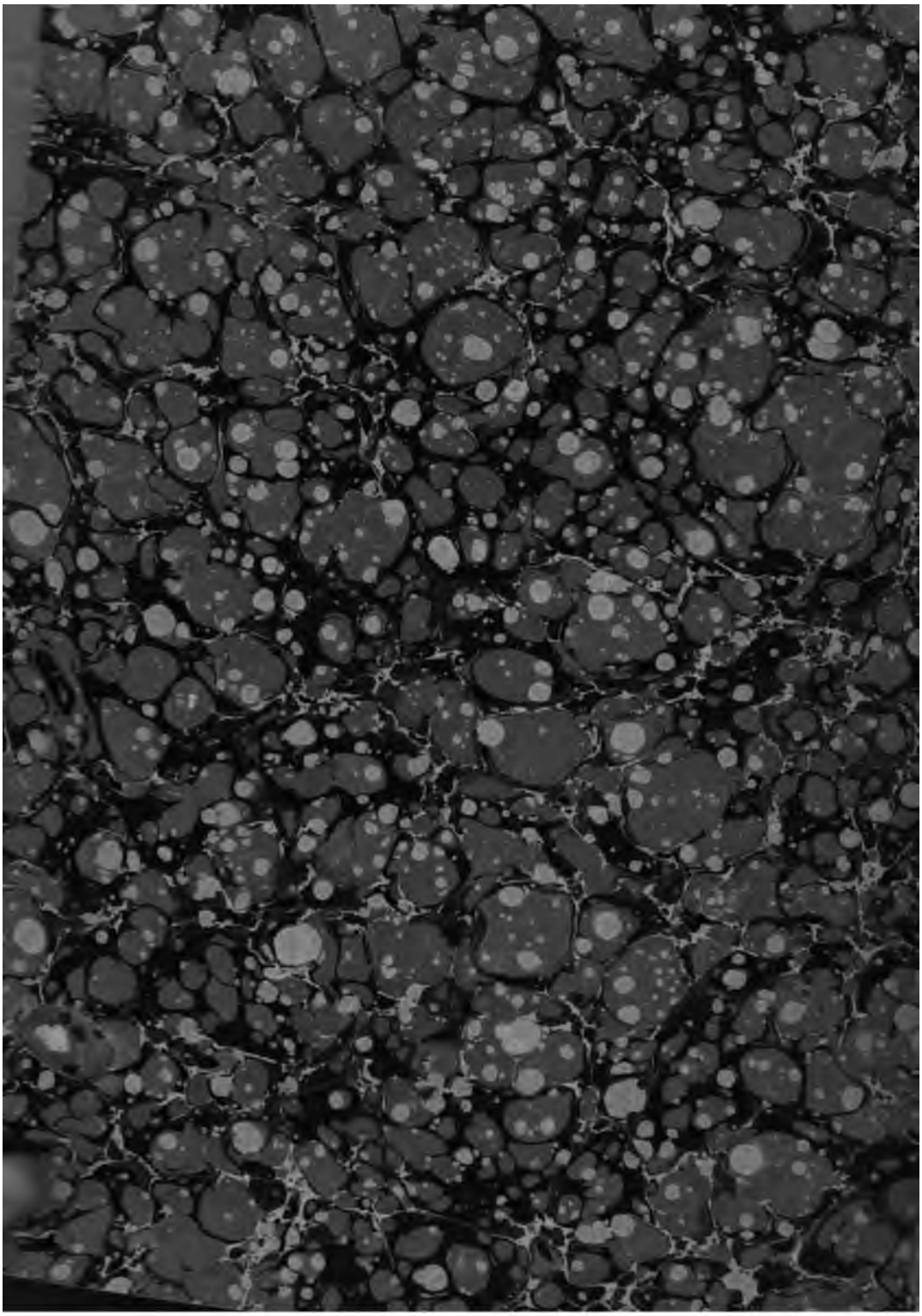
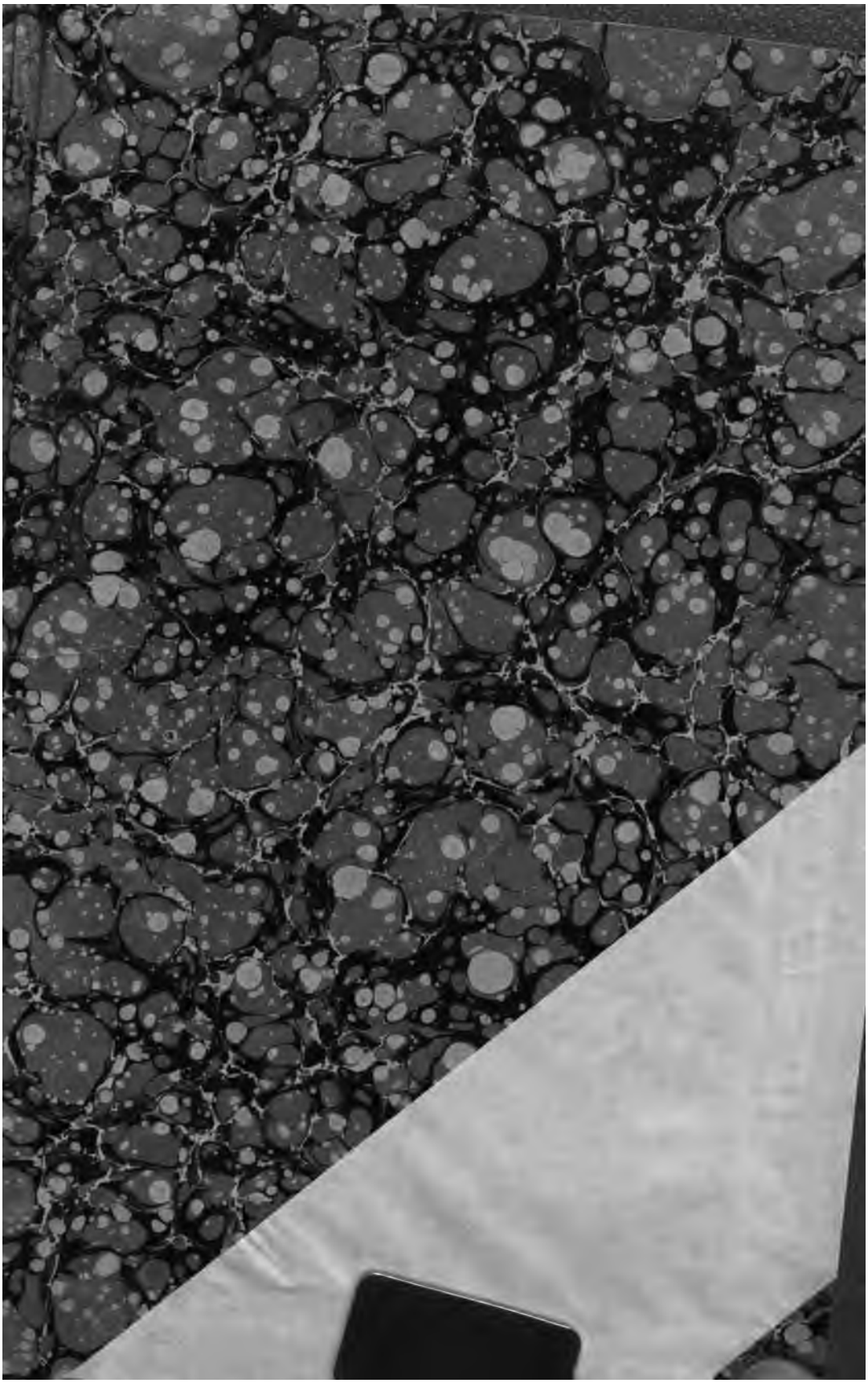
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME TRENTE-TROISIÈME.

PARIS,

AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,

A LA SORBONNE.

1905.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
36349 Quai des Grands-Augustins, 55.